В.А.Бунин

СБОРНИК РАБОТ ПО СВЕРХСТЕПЕННЫМ ФУНКЦИЯМ И ЧИСЛАМ НОВОЙ ПРИРОДЫ

Москва
2021

Сборник работ В.А.Бунина, посвященных сверхстепенным функциям и числам новой природы

Электронное издание

Составление и компьютерный набор: Тюрин-Кузьмин А.Ю., 2021 г.

Ряд работ публикуется впервые

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие от составителя 5
Математика и трудности физики *Бунин В.А.* 8
Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов *Бунин В.А.* 26
Решение задачи электродинамики о максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы *Бунин В.А., Чудинов В.А*…………………………………………..30
Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы *Бунин В.А., Чудинов В.А*...33
Сверхширокополосный 3-мерный волновод в виде спирали *Бунин В.А*.....36
Письмо в редакцию Математической энциклопедии *Бунин В.А* 39
Краткая историческая справка *Бунин В.А* 41
Сопроводительный текст (не для печати) *Бунин В.А* 47
Объемная логарифмическая спираль («улитка»), как нетривиальный пример 3-мерных ортогональных координат *Бунин В.А* 48
Письмо Л.С.Понтрягину *Бунин В.А* 54
Нетривиальные примеры новых 3-мерных ортогональных координат *Бунин В.А* 56
О непригодности основной теоремы алгебры и теоремы Фробениуса для рассмотрения "парадигмы замкнутости поля комплексных чисел" . *Бунин В.А* 60
Сверхстепень, сверхкорень.. *Бунин В.А, Бунин В.В.* 67
Сверхмнимости в геометрии *Бунин В.А.,Павлова Е.Л.,П.А.Флоренский* 70
Три тупика современной математики *Бунин В.А., Павлова Е.П*..................88
Физико-математические проблемы для III тысячелетия. *Бунин В.А*...........98
Приложение:...115
Письмо А.И.Ленина 115
Сверхстепенные функции и некоторые их применения в анализе *Ленин А.И*………………………………………………………………134
Дифференцирование сверхстепенных функций *Ленин А.И* 124
О систематике в числовой атомистике *Чудинов В.А.*................................137

Предисловие от составителя

В начале 2000-х г.г. мне случайно попалась статья В.А.Бунина "Математика и трудности физики", опубликованная в журнале "Сознание и физическая реальность". Она произвела на меня большое впечатление. В ней автор очень доступно описал несколько своих прорывных идей в самых основаниях математики, как предпосылки физического познания. Мне очень захотелось познакомиться с ним, чтобы узнать подробнее о ряде вопросов, но удалось это сделать только в году 2007 -2008. Оказалось, что мы живем неподалеку друг от друга, и я стал часто бывать у них в гостях. Валентин Алексеевич к тому времени полностью потерял зрение (ему было уже далеко за 80), но голова была ясная, а память – великолепная. Больше всего из упоминавшихся В.А. направлений меня интересовала возможность описания объемных процессов с помощью "чисел новой природы" так же просто, как процессы, происходящие в плоскости, описываются комплексными числами. Однако в упомянутой статье и в ряде других работ В.А. этот момент был описан крайне лаконично. Перипетии жизненного пути В.А. в науке объясняют его осторожность в изложении подробностей его открытий. Поскольку сам я не математик, и преодолеть переход от идеи и вида сверхмнимого числа к операциям с ним был не в силах, я надеялся, что, если создать условия, В.А. сам подробно изложит это, на мой взгляд, самое главное его достижение. Постепенно созрело совместное решение написать несколько книг. Большое участие в этом приняла жена В.А. Ольга Ивановна Бунина. В.А. диктовал, Ольга Ивановна записывала, а я переводил все это в электронный формат и ездил в издательство. Формулы диктовать трудно, их брали из диссертации В.А., написанной в 50-х годах. К сожалению, В.А. начал изложение не с темы чисел новой природы, а с другой, имеющей чуть более прикладной характер, решенной благодаря числам новой природы, но без демонстрации их применения –

темы "гармонизации объекта по целевой функции". Так были опубликованы 2 книги [2, 3]. Семейные обстоятельства на несколько лет прервали этот процесс. Пытаясь подтолкнуть В.А. к продолжению изложения его идей я собрал в сборник [4] его работы, многие из которых были опубликованы в малодоступных изданиях, некоторые хранились у В.А. в виде ксерокопий, ссылки на другие (особенно под эгидой МОИП) были в таком виде, что их невозможно было найти в каталогах библиотек, т.к. они входили в сборники, имевшие свои уникальные названия и т.д. Однако возобновить диктовку книг так и не удалось.

После кончины В.А. его родные дали возможность ознакомиться с его архивом. К сожалению, часть архива хранилась на даче и была утрачена. Среди оставшихся бумаг есть ряд неопубликованных работ, предлагавшихся для опубликования в математических изданиях, и материалы переписки по поводу их публикации. Эти письма проливают дополнительный свет на мотивы и стиль публикаций В.А., поэтому показалось важным включить и их в этот сборник.

Один из немногих профессиональных математиков, решивших в то сложное для научной деятельности время посвятить свои силы направлению, указанному В.А., был Александр Ильич Ленин. Он опубликовал статью "Сверхстепенные функции и некоторые их применения в анализе" [5] (доступную в интернете), а также подготовил к публикации ее продолжение "Дифференцирование сверхстепенных функций" (имеется в рукописном варианте в архиве В.А.). Дальнейшие обстоятельства жизни А.И. Ленина мне неизвестны, но, опасаясь, чтобы его работа не пропала, я счел возможным опубликовать ее в качестве приложения к этому сборнику. Также в качестве приложения была включена статья В.А. Чудинова, одного из соавторов В.А., (уже включавшаяся в сборник [4]), близкая по духу и тематике работам сборника, в частности, объясняющая градацию рангов арифметических действий, упоминаемую В.А. Буниным.

А начать этот сборник представилось нужным (вопреки хронологической последовательности) именно статьей 1997 года, как введением в основную проблематику, разрабатывавшуюся Валентином Алексеевичем Буниным.

Литература

1. Бунин В.А. Математика и трудности физики // Сознание и физическая реальность Том 2, №2, 1997, с. 71-79
2. Бунин В.А. Биоподобие техногенных систем. Математический код метагармонии. URSS, М., 2010 г., 96с
3. Бунин В.А. Троеначальный код адекватности образного и абстрактного знания как ключ к нерешенным проблемам. URSS, М., 2012 г., 88с.
4. Бунин В.А. Сборник статей, М., 2014 г. 282с. (Электронное издание) www.trinitas.ru/rus/doc/0001/005d/2494-bn.pdf
5. Чудинов В.А. О систематике в числовой атомистике. * В кн. "Новые философские проблемы физики", МОИП, секция физики, М., Гл. ред. восточной литературы, 1977, с.65-72

Тюрин-Кузьмин А.Ю.

В. А. Бунин

МАТЕМАТИКА И ТРУДНОСТИ ФИЗИКИ*

Цель настоящей публикации — показать, что в "неразрешимости" некоторых проблем физики виновата не столько физика, сколько математика. Устранение хотя бы части недостатков современного аппарата математики, можно надеяться, сможет обеспечить значительный прогресс в понимании и описании ряда физических объектов и процессов.

ОПИСАНИЕ СВЕРХБЫСТРЫХ И СВЕРХМЕДЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ [1]

Рассмотрим сравнительно простой вопрос о трудностях описания сверхбыстрых и сверхмедленных процессов. Как известно, формальное описание взрывных, лавинных и цепных процессов часто наталкивается на недостаточную "скорость роста" степенных функций, а процессы эволюции, трансмутаций, старения частиц — на недостаточную "медленность" обратных функций. По-видимому, отсутствие соответствующего математического аппарата явилось результатом забвения эволюционного пути развития понятия "математическое действие". Отход от "столбового пути" можно датировать 1545 годом — годом открытия мнимых чисел. Обратимся к понятию натурального ряда чисел 1, 2, 3,... (иногда в него включают и 0) — основного "строительного кирпича" всего здания математики. Кажется, Кронекер, подчеркивая основополагающую роль натурального ряда как понятия о количестве объектов Природы, сказал: "Натуральный ряд чисел создал Бог, остальное — дело рук человека". Из натурального ряда чисел естественно вытекают три главных следствия:

1. Понятие о ДЕЙСТВИЯХ (прямых и обратных) над числами натурального ряда. Действия, в свою очередь, подразделяются на СТУПЕНИ, причем n-кратное повторение

---

*Сознание и физическая реальность Том 2, №2, 1997, с. 71-79

прямого действия 1-й ступени — сложения — приводит к прямому же действию 2-й ступени — умножению, например: 2 + 2 + 2 + ... + 2 = 2n. Аналогично, многократное повторение прямого действия 2-й ступени — умножения — приводит к прямому действию 3-й ступени, — возведению в степень: 2 · 2 · 2 ·... · 2 = 2n.

2. Понятие о НОВЫХ ЧИСЛАХ, которых нет в натуральном ряде, но которые возникают в результате упомянутых прямых и обратных действий. Конечно, такие новые числа получаются не всегда, и их отыскание, открытие напоминает отыскание и открытие новых объектов Природы. Такая аналогия обоснована тем, что натуральный ряд — модель (хотя и весьма абстрактная), хранящая информацию о количестве природных объектов. Нетривиальность, своеобразное интуитивное экспериментирование при поиске новых чисел хорошо иллюстрирует история открытия мнимых чисел.

Но вернемся к основам теории чисел: иногда, чтобы выполнить обратную операцию, приходится вводить числа новой природы. Так, попытка вычесть большее число из меньшего безуспешна без отрицательных чисел. Неосуществимость деления в целых числах приводит к необходимости введения чисел нецелых ("ломаных", по удачному определению Эйлера). Наконец, неизвлекаемость корня четной степени из отрицательного числа заставила, помимо всех известных до этого действительных чисел с единицей i, = 1 ввести мнимые числа с единицей $i_2 = \sqrt{-1}$.

Обозначения i_1, i_2, i_3, i_4, ... использованы, чтобы подчеркнуть потенциальную возможность естественного продления цепочки новых чисел.

3. ГЕОМЕТРИЯ, которой должны соответствовать числа и операции над ними. Сразу же оговоримся, здесь имеется в виду геометрия в понимании людей, способных к пространственному мышлению. Эту геометрию нельзя путать с построениями типа "алгебраической геометрии", прививаемыми современной математической школой Бурбаки, которая, на наш взгляд, препятствуя образному мышлению, заставляет реагировать только на абстракции.

Но вернемся к геометрии. Числа натурального ряда можно поставить в соответствие точкам на правой Декартовой полуоси, отрицательные целые числа — столь же редким точкам на левой полуоси, а нецелые действительные числа заполняют всю действительную ось. Следующий шаг в построении геометрии, адекватной числам, сделал Вессель, предложив трактовать мнимые числа, как точки вдоль вертикальной, мнимой оси. К сожалению, этот шаг оказался последним в построении геометрии, адекватной алгебре. Об этом хорошо сказано в книге П. Муна и Д. Спенсера [2]: "Математики ожидали, что распространение понятий о комплексных числах с 2-х на 3-хмерные объекты окажется "детской игрой", однако огромные усилия были потрачены безрезультатно, так как такое распространение не удавалось без утери правил обычной алгебры". Как бы то ни было, но на действиях 3-й ступени (степень - корень - логарифм) естественное развитие оборвалось, поскольку кватернионы, гиперкомплексы и другие "экзотические" построения оказались оторванными от геометрии. Таким образом, перспективный, на наш взгляд, путь развития казался тупиковым. Так, И. Арнольд в "Теоретической арифметике" [3] говорит, что многократное прямое действие 3-й ступени — степень — приводит к прямому действию 4-й ступени — сверхстепени, которое, по его мнению, очень сложно, совершенно не изучено и, по-видимому, абсолютно бесполезно. Создается впечатление, что вопрос о том, не появятся ли новые числа (отличные и от действительных, и от мнимых), лежащие вне поля комплексных, при обратных действиях 4-й и более высоких ступеней остался без внимания.

Итак, рассматривая следствия натурального ряда, мы фактически показали существование функций, более "скоростных", чем степенные. Очевидно, что прямое действие уже 4-й ступени — сверхстепень — является более быстрым, чем степень. Вот простейшие примеры прямых и обратных действий со сверхстепенями: ${}^{3}\nearrow 2 = 2^{2^2} = 16$ (стрелка вверх означает сверхстепень); ${}^{3}\swarrow 16 = 2$ (стрелка вниз означает сверхкорень). При росте числа результат резко растет,

например: ${}^{3}\nearrow 33 = 7\,625\,597\,484\,987$

Столь же очевиден медленный ход обратных действий 4-й и последующих ступеней.

Определение сверхстепени, как многократно повторенной степени, подробно рассмотрено в упомянутой книге Арнольда [3]. Обобщение сверхстепени с целочисленных показателей на иные (дробные, мнимые) проводится так же, как при действиях 2-й и 3-й ступеней. Так, было обнаружено, что выражение

$$i_3 = \sqrt{-1}\left({}^{-\sqrt{-1}}\swarrow -1\right)$$

является числом новой природы — сверхмнимым", которое можно использовать в качестве величины, откладываемой по третьей — сверхмнимой Декартовой оси [4].

В результате решения первой задачи (показать возможности математики при описании сверхбыстрых и сверхмедленных процессов в физике) образовался некий задел в виде совершенно новых — сверхмнимых чисел. Однако сразу же возникает вопрос: о каких новых числах говорит автор, если существует основная теорема алгебры [5-10], запрещающая выход из поля комплексных чисел? Основная теорема алгебры (ОТА), суть которой: новых чисел не может быть никогда, занимает совершенно особое место. Эта теорема впервые была сформулирована в 1608 г. Петером Роте, затем в 1629 г. она привлекла внимание А. Жирара и в 1637 г. — Р. Декарта. Позднее этой теоремой занимался ряд известных ученых, и считается, что первое строгое и полное ее доказательство дал в 1799 г. К. Гаусс [8]. Напомню, вначале Гаусс предполагал существование неких чисел, отличных от мнимых, и, не найдя их, четырежды брался за доказательство основной теоремы. Существует много формулировок этой теоремы, например: "Поле комплексных чисел является алгебраически замкнутым полем" [9]. Публикации об ОТА часто имеют вид не столько доказательств, сколько деклараций: "...выход за пределы комплексных чисел невозможен или по крайней мере излишен, ибо вычисления с комплексными числами носят характер полной законченности" [11]; "Фундаментальное значение комплексных чисел для алгебры в первую очередь определяется тем фактом, что при переходе к уравнениям высших степеней не приходится расширять множество чисел, добавляя... еще какие-либо числа "особого рода"... этот факт составляет содержание основной теоремы алгебры" [10]. Настораживает не только обилие формулировок основной теоремы, но и постоянное установление запрета на ЛЮБЫЕ попытки дальнейшего арифметического развития понятия числа. О некорректности такого запрета свидетельствует то, что ОТА формулируется применительно к действиям не выше 3-й ступени, т.е. в качестве инструмента выхода из поля комплексных чисел рассматриваются исключительно степенные многочлены. Однако, если сделать хотя бы еще один шаг, включив в рассмотрение действия 4-й ступени, то основная теорема окажется обойденной. Приведем контрпример к ОТА в виде функции Ф1 (Х), на которую доказанность или недоказанность ОТА не налагает никаких ограничений. Действительно, приняв

$$\Phi_1(X) = {}^{\,\overset{n\,\nearrow}{\underset{\nearrow}{\overset{\cdots}{\nearrow}}}}X$$

и памятуя о том, что практически все доказательства ОТА опираются на невозможность выхода из поля комплексных чисел с помощью многочлена [5-10]

$$\Phi(X) = aX^n + bX^{n-1} + cX^{n-2} + \dots,$$

видим, что функция Ф1(Х), как более старшая (ее ступень равна числу стрелок плюс три, в то время, как ступень многочлена равна всего трем, т.е.ниже), сводима к младшей только в тривиальных частных случаях. Поясним это простым примером: сумма А двоек, т.е. действие 1-й ступени, равносильно может быть записана в виде действия 2-й ступени — произведения 2А, причем в этом тривиальном случае, очевидно, справедлив и обратный переход. Но, чуть усложнив старшую функцию, например, заменив ее на 2(А + 0,1), заметим, что обратный переход от произведения к сумме станет невозможным.

Из сказанного следует, что ОТА становится принципиально непригодной для утверждения парадигмы замкнутости поля комплексных чисел и нет смысла разбирать правильность или неправильность каких бы то ни было следствий ОТА (например, известной теоремы Фробениуса).

К сожалению, ОТА не только затормозила развитие математики, но и способствовала появлению того, что можно назвать "псевдоматематикой", — диковинного конгломерата, когда наряду с математическими понятиями используются чисто "лингвистические", буквенные обозначения. Так, в кватернионах среди четырех ортов 1, i, j, к только два орта сохранили свое происхождение от натурального ряда: i1 = 1 и $i_2 = \sqrt{-1}$. Создатель кватернионов Гамильтон более десятилетия пытался найти аналогичные новые числа для построения нормальной трехмерной геометрии по типу комплексной плоскости. Но ему это не удалось, и тогда он просто обозначил буквами j, к не найденные орты-псевдочисла. "Лингвистический подход" закономерно привел к тому, что кватернионы непригодны для координатного представления и не подчиняются правилам арифметики. Это касается и векторного исчисления, возникшего как частный случай кватернионов: нет деления, два умножения, хотя векторы ограниченно полезны.

ОПИСАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Для решения задач математической физики целесообразно иметь естественные координаты, совпадающие с границами исследуемого объекта. Кроме того, координаты должны быть ортогональны, ибо в косоугольных координатах точные решения практически недоступны. Современная же математика располагает лишь комплексной плоскостью — двухмерными координатами, а все выдаваемые за трехмерные практически тривиальны. Так, цилиндрические — неизменны по оси и по углу, т.е. фактически одномерны, сферические — двумерны и т.д. Использование третьей декартовой оси и получение таким образом истинно трехмерных координат невозможно из-за отсутствия соответствующих чисел. Однако, откладывая вдоль трех координат числа с единицами различной природы: действительными $\acute{\imath}_1$, мнимыми i_2, сверхмнимыми i_3, где $i_1 = 1$, $i_2 = \sqrt{-1}$, $i_3 = \sqrt{-1}\ \left(^{-\sqrt{-1}} \swarrow -1\right)$, получаем для трехмерного случая возможность по простым точным замкнутым формулам, аналогичным формулам конформных отображений, рассчитывать новые объекты. Так, в [4] представлен "математический натюрморт" из новых неизвестных современной математике триортогональных координат: изогнутый профиль Жуковского, свернутый в восьмерку тор (частица), деформированная сфера (груша) и ряд других фигур. Аналогичным путем выведены формулы для объемной логарифмической спирали [12, 13], изогнутого эллипсоида [4], многогранников [14].

Возникает вопрос: как оперировать новыми числами, появляющимися в рассматриваемом подходе при действиях все более высоких ступеней и как найти их адекватность n-мерной геометрии?

ОПИСАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Проблема наглядной многомерности — одна из наименее ясных в науке. Известны даже трагедии, связанные с этой проблемой [15]. Вместе с тем, существуют догадки творца аналитической геометрии Р. Декарта о полной "генетичности" любого числа измерений. Так, в одной из своих лучших работ, не предназначавшейся для печати, а созданной как "памятка на старость", он писал: "...измерениями тела являются не только длина, ширина и глубина, но также и... бесчисленные измерения... в одном и том же предмете может быть бесконечное количество различных измерений... все они равноценны... Рассмотрение этого проливает яркий свет на геометрию, ибо большинство людей ошибочно представляют в этой науке три рода величин: линию, поверхность и тело" [16].

Сделать многомерную геометрию адекватной алгебре и столь же наглядной, как двух- и трехмерная геометрия, позволяет единый подход к проблеме: одномерный объект — точка, пронесенная по оси, двухмерный объект (плоскость) — одномерная ось, перенесенная вдоль второй оси, объем — плоскость, перенесенная вдоль третьей оси. Аналогично продолжая эту цепочку переносов, получим вначале четырехмерное пространство — тройку — объем, перенесенный вдоль четвертой оси (что дает, образно говоря, "толстую ось"), пятимерное пространство — толстая ось, перенесенная вдоль пятой оси (получится "толстая плоскость") и т.д., в результате чего возникает фракталоподобная система из троек осей — реперов, начало каждой из которых (троек) фиксируется тремя независимыми значениями координат соседней тройки.

Казалось бы, все здесь достаточно просто (нет неоднозначности координаты точки), но эта простота становится очевидной только если, как и при конформных отображениях, по всем осям откладываются числа разной природы. Тогда после выполнения любых алгебраических операций можно разложить результат по соответствующим осям. Конкретнее это описано в [17, 18], где приведены формулы для девятимерного (манипулятор) и 81-мерного (кубик Рубика) объектов. Разумеется, ввиду неразработанности объемных, а тем более многомерных дисплеев, можно пользоваться свернутой [18] информацией в виде системы реперов не из троек, а из двоек координат. Не существует принципиальных ограничений на вид реперов, которые могут быть четырехмерными, кластерными и даже фрактальными, что соответствует бесконечным размерностям. Отметим также, что утверждение о дробной размерности фракталов — заблуждение, заслуживающее отдельного рассмотрения.

При изложенном подходе к многомерности соблюдается основное требование к n-мерности точки: одной точке в n-штучном наборе разноприродных осей будет соответствовать ровно n независимых значений координат, и все это при полной геометрической наглядности и аналогии первым трем измерениям, как и предвидел Декарт.

ЕДИНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОГРАВИТАЦИИ

Огромные усилия были затрачены А. Эйнштейном и другими учеными на построение единой системы уравнений, описывающей электромагнитные и гравитационные взаимодействия. Причина бесплодности этих усилий, на наш взгляд, — игнорирование того, что корни математики лежат в самой Природе, а не постулированы произвольно. Подобно тому, как натуральный ряд чисел — предельная абстракция дискретных предметов реальной Природы, искомые единые уравнения, если следовать Максвеллу, также должны быть абстракцией поведения некоей непрерывной природной среды — эфира. Как известно, Максвелл обладал гениальным образным, модельным мышлением и поэтому практически никогда не ошибался. Знаменитые уравнения Максвелла до сих пор служат непревзойденным образцом для построения любого раздела науки. Поэтому при поиске единых уравнений логично не пытаться безмодельно угадывать эти уравнения, как делали Дирак (для античастиц), Эйнштейн (для ОТО), Шредингер (для вероятностных объектов), а повторить путь Максвелла, идя от механики сплошной среды. Проделав эти простые, но довольно громоздкие выкладки, получим уравнения теории упругости, которые несложно преобразовать в классические уравнения Максвелла, но ... с лишним членом [19, 20]. Этот вывод повторен в [21]:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \gamma\Gamma = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,.$$

Новый член соответствует объемным деформациям в статике и продольным волнам в динамике. Остается загадкой, почему Максвелл, отбросив этот член, исключил объемные деформации эфира и сохранил только поперечную компоненту. По-видимому, объяснение заключено в высказанном вскользь отказе Максвелла заниматься вопросами гравитации из-за невозможности понять случаи отрицательной гравитационной энергии.

Если отождествить новый член $\gamma\Gamma$ с новыми процессами (гравитационными, продольно-электрическими и др.), то логично утверждать, что это и есть искомые единые уравнения электрогравитации по [19, 20]. Кстати, из них и вытекает, что возможна скорость c2 новых волн, вдвое большая скорости c1 радиоволн, и что возможна продольная поляризация. На базе этих же данных зарегистрировано первое в мире изобретение [22] по гравиосвязи, позднее (правда, с ошибкой) повторенное

Вебером (США). В основе этого изобретения лежат массы, подверженные влиянию прохождения гравиволн, разнесенные вдоль направления приема, и датчик расстояния между ними.

УРАВНЕНИЯ ГАРМОНИЗАЦИИ И САМОГАРМОНИЗАЦИИ

Сегодня в каждом разделе науки стремятся построить собственный математический фундамент, свой аналог уравнений Максвелла, который позволит получать надежные теоретические прогнозы. Совершенно очевидно, что уравнения биофизики, например, должны описывать общие закономерности структуры и динамики биологических объектов. Сложность таких объектов априори позволяет утверждать, что эти уравнения заведомо нелинейны, т.е. относятся именно к тому типу уравнений, для которых поиск точных решений проблематичен. Однако при рассмотрении вышеприведенной системы уравнений был обнаружен класс точных замкнутых новых решений таких дифференциальных уравнений в частных производных, которые можно назвать "уравнениями гармонизации" для объектов техники различной природы. На их основе был сделан ряд изобретений. Оказалось, что "гармонизированные" объекты приобретают своеобразную системность и функциональную оптимальность по главной целевой функции. Например, звуковод со скачкообразным изменением сечения и произвольными поворотами сохраняет свойства прямого звуковода, и, следовательно, сохраняет способность хорошо выполнять свою целевую функцию: транспортировать механические колебания во всей рабочей полосе частот без потерь на отражения. Такое же свойство вследствие гармонизации приобретает и волновод для электромагнитных колебаний [6]. В частном случае статики получаются равноэлектропрочные, а в механике — равнопрочные изделия.

Отметим, что и биологические объекты тоже устроены наилучшим образом для выполнения целевых функций. Так, например, хрусталик глаза неоднороден по преломлению, что устраняет хроматическую аберрацию; а улитка уха за счет неоднородной упругости наилучшим образом приспособлена для канализации и концентрации звуковых колебаний. Поскольку двух разных решений одной и той же задачи — функциональной оптимизации — быть не может, логично заключить: существует единственная система уравнений гармонизации, справедливая для объектов [22 - 24]. Математический прием [12], позволивший найти простые точные решения казалось бы неразрешимых уравнений неоднородных и даже анизотропных сред, основан на простом физическом факте: объекту любой сложной внешней формы можно придать такую внутреннюю структуру, что в результате взаимной компенсации внешних и внутренних нерегулярностей получится гармоничный, совершенный объект, обладающий своеобразной системностью. В теории функций комплексного переменного гармоничными называют функции, текущие значения которых связаны и обладают системностью, благодаря которой по значениям функции в одной области можно найти ее в других областях. Таким образом, под гармоничным следует понимать объект, который удовлетворяет требованиям системности и, вместе с тем, наилучшим образом приспособлен для выполнения своей основной, целевой функции.

При проведении математических исследований обычно исходят из наиболее общих законов, таких как принцип наименьшего действия (в механике) и ряд других вариационных принципов, являющихся по сути следствиями закона сохранения энергии, приспособленными для решения конкретных проблем. Однако исследование показало, что эти частные принципы практически непригодны для решения столь общей задачи, как нахождение общих уравнений гармонизации. Они представляют собой даже не уравнения, а решения, сразу дающие ответ, по какому закону надо строить внутреннюю структуру объекта, как организовать неоднородность и анизотропность, чтобы объект стал гармоничным.

При поиске уравнений гармонизации оказалось удобным исходить непосредственно из закона сохранения энергии, сформулированного Н. Умовым для распространения энергии в твердых телах, где поток энергии

$$\int_S Э dS = \int_{\eta_1}^{\eta_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} Э\, i_\eta\, d\eta\, i_\zeta\, d\zeta = \text{const} \neq f(\xi)\ .$$

Эта запись выражает в триортогональной системе координат ξ, η, ζ независимость потока энергии сквозь сечение с границами η1, η2, ζı, ζ2 от продольной координаты. Такое полное прохождение потока энергии и обеспечивают уравнения гармонизации [12], имеющие вид:

$$A_\xi = A_{\xi 0}\frac{ah_\xi}{h_\eta h_\zeta}F_1\,, \quad A_\eta = A_{\eta 0}\frac{ah_\eta}{h_\zeta h_\xi}F_2\,,$$

$$A_\zeta = A_{\zeta 0}\frac{ah_\zeta}{h_\xi h_\eta}F_3\,, \quad B_\xi = B_{\xi 0}\frac{ah_\xi}{h_\eta h_\zeta}F_4\,,$$

$$B_\eta = B_{\eta 0}\frac{ah_\eta}{h_\zeta h_\xi}\frac{1}{F_3}, \quad B_\zeta = B_{\zeta 0}\frac{ah_\zeta}{h_\xi h_\eta}\frac{1}{F_2},$$

где a = const, h — коэффициент Ламе (геометрический коэффициент).

Подчеркнем, что эти уравнения совершенно бесполезны, если не иметь математического аппарата для построения конкретных, в нашем простом случае триортогональных координат ξ, η, ζ. Необходимым условием построения координат является нахождение их коэффициентов Ламе. Таким образом, непременным условием использования уравнений гармонизации является привлечение аппарата сверхкомплексных чисел, дающего триортогональные конкретные координаты. В этих уравнениях компоненты тензоров A_i и B_i для акустических колебаний имеют вид

$$A_i = \rho\frac{2\mu_i}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad A_{i0} = \rho_0\frac{2\mu_{i0}}{\lambda_{i0} + 2\mu_{i0}},$$

$$B_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{2\mu_i^2}, \quad B_{i0} = \frac{\lambda_{i0} + 2\mu_{i0}}{2\mu_{i0}^2},$$

а для электромагнитных волн эти компоненты имеютзначения $A_i = \varepsilon_i, A_{i0} = \varepsilon_0,\ i = \xi, \eta, \zeta,\ \mathrm{B}_i = \mu_i'$,

$B_{i0} = \mu_{i0}'$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, μ_0, λ, ρ_0, ε_0 — значения упругости и других параметров среды внутри объекта вдали от неоднородности; $F_{1,2,3,4}$— геометрические коэффициенты. Приведенные уравнения сильно упрощаются в частных случаях, например, для гармонизированного звуковода [23], волновода [5]. Разумеется, использование этих уравнений гармонизации (или более общих) не ограничено только звуководами, волноводами или статически равнопрочными конструкциями. Уравнения гармонизации, как имеющие весьма общий характер, перспективны и для других приложений, поскольку являются иной формой записи закона сохранения энергии. С их помощью можно оптимизировать тепло- и массообмен и, по-видимому, наконец, решить задачи трех тел даже в том предельно сложном случае, когда их начальные скорости не компланарны, а также изучить процессы "самогармонизации" [13].

СТРУКТУРА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Зоммерфельд отмечал, что "электрон — чужак в электродинамике", т.е. его существование не вытекает из уравнений Максвелла. Сегодня признано, что элементарные частицы представляют собой некие топологические образования. По существу, это возвращение к гениальной догадке Максвелла о том, что замкнутый вихревой жгут (вихревое кольцо) будет оставаться на месте, если его "заузлить" в виде трилистника. И это было высказано тогда, когда о существовании элементарных частиц даже не предполагали! Для развития этой идеи Максвелла следует вихревой жгут идентифицировать с магнитной линией (струной) и тогда считать, что частицы построены из замкнутых магнитных струн. Например, электрон в виде вращающейся "восьмерки" обладает спином, "зарядом", магнитным моментом. И, конечно же, массой — эквивалентом энергии движения, создающей напряжение в эфире. Подчеркнем, что никакого заряда, как субстанции, в этой концепции не существует, а электрическое поле, которое, как и прочие поля, включая вещество, есть поле деформаций эфира, является результатом деформаций, например смещения среды по радиусу. В гидродинамическом аналоге такой структуры подобный эффект вызвала бы сила Магнуса при вращении свернутого в восьмерку замкнутого вихря. В рамках этих представлений первичны не заряды, а магнитные линии и их движение. Иными словами, заряды — это теплород электродинамики.

Более подробно это, а также структура бесспиновых частиц, как пар соосных магнитных колец, описаны в [14, 20, 25 - 27]. Мы упомянули о таких объектах прежде всего потому, что строгое математическое описание структуры частицы требует использование криволинейных координат, соответствующих описываемой частице, а построение таких координат предполагает использование сверхмнимых чисел.

В свете сказанного, следует выступить в защиту знаменитых "шестеренок Максвелла". Долгие годы навязывалось мнение, что Максвелл пользовался механистическими моделями, в том числе шестеренками, не всерьез, а лишь как строительными лесами, затем убранными (кстати, сделано это не им самим, а "последователями"). Приходится с сожалением констатировать: наука вместе с шестеренками выбросила саму модельную суть эфира. А если добавить, что целочисленность количества зубьев или лепестков магнитной линии, образующей частицу, и есть истинная причина квантуемости, то станет понятна важность таких "строительных лесов".

Удачными объектами для применения новых чисел оказались, наконец, гораздо более сложные образования — кристаллоподобные материалы. Если корень n-й степени из единицы на комплексной плоскости соответствует геометрически правильному n-угольнику, то корень n-й степени из соответствующей единицы в сверхкомплексном объеме соответствует (в полном согласии с системным подходом) геометрически правильным многогранникам [12, 14]: октаэдру $\sqrt[4]{1}$, кубу $\sqrt[4]{-1}$,тетраэдру $\sqrt[3]{i_2}$ и т. д. вплоть до поликристаллов и квазикристаллов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА

Существует еще одна математическая проблема, которая, в отличие от привычных, даже не стала предметом внимания. Речь идет о совершенной бессистемности математических символов. Плохо не то, что символика архаична и застыла на уровне XIV века, а то, что она не предусматривает возможности развития.

Вводя символ действия для каждой новой ступени, мы расширяем возможности математики. Так, знак умножения вместо цепочки сложений позволяет умножать на дробное число, что не выполнимо для сложения. Иначе говоря, хорошая символика — тоже ключ к развитию, которому препятствует принятая символика.

Предложенная в [5] числовая символика способствует развитию системного подхода и заключается в том, что, например, для прямого действия 2-й ступени — умножения — вводится числовой символ 2 (подчеркивание определяет символ как действие). Тогда пять, умноженное на шесть, запишется: $5\ \underline{2}\ 6$. Для обратных действий удобно применять отрицательные и мнимые числа. Такая числовая символика, в отличие от действующей, позволяет говорить о создании совершенно нового исчисления — исчисления действий, где искомым может являться само действие. Разумеется, этот вопрос только затронут и требует серьезного развития, например, путем введения экспоненциальной формы комплексного числа, фаза которого будет давать прямые, обратные и даже промежуточные действия, которых математика пока не знает.

ЛЮБОПЫТНЫЙ ЮРИДИЧЕСКИЙ ФАКТ, КАСАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОСТИЖЕНИЙ

Несмотря на хорошо поставленную рекламу математики как "царицы наук" и существование книг типа "Изобретения в математике" Ж. Адамара или "Математическое открытие" Д. Пойа, небезызвестен и тот факт, что математики "сурово наказаны" тем, что ни в одной стране мира ни одно математическое достижение не признают ни изобретением, ни открытием. В чем же дело? Что дало основание юристам, как правило малосведущим в математике (юрист Ферма — исключение, подтверждающее правило), записать: "Не признаются изобретениями устройства для грабежа, для казни преступников, игры, символы, значки, математические достижения "? Почему математические достижения уравнены в правах с играми и устройствами для грабежа? Сделано это, вероятно, для того, чтобы истинно полезные и новые достижения не утонули в информационном шуме непринципиальных результатов. Ведь математическими достижениями считаются (например, в школе Бурбаки) и доказательства бесчисленных теорем существования, и нагромождение результатов, основанных на собственных постулатах автора. Причем единственным критерием правильности считается внутренняя непротиворечивость в пределах постулатов, сформулированных самим автором, а отнюдь не соответствие Природе.

Так стоит ли удивляться, что физика, берущая пример с математики, перестроившись "под математику", начала испытывать трудности? И права ли математика, считающая физику своим "зеркалом", утверждая, что недоступность математике многих проблем физики объясняется только тем, что "зеркало кривое"?

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бунин, "Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов", Труды МОИП. Секция физики, Изд-во МГУ, Москва (1967), с. 71-73.
2. P. Moon, D. N. Spenser, Theory of holors, Cambridge (1986), p. 11.
3. И. В. Арнольд, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, Москва (1932), с. 390 - 394.
4. O. B. Balakshin, V. A. Bunin, Y. A. Ignatieff, "Some examples of threeorthogonal objects of noneuclidean symmetry", in: Abstracts of the Interdisciplinary Symmetry Symp., Budapest (1989), pp. 246 - 248.
5. В. А. Бунин, В. А. Чудинов, "Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы", Труды МОИП. Секция физики, Изд-во МГУ, Москва (1976), с. 124 - 126.
6. В. А. Бунин, В. А. Чудинов, "Решение задачи о максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы", Труды МОИП. Секция физики, Изд-во МГУ, Москва (1976), с. 127 - 130.

7. В. А. Бунин, В. В. Бунин, "Сверхстепень, сверхкорень...", Наука и жизнь, № 10, 140 (1989).
8. Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, ГТТИ, Москва - Ленинград (1936) с. 10.
9. О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин, Толковый словарь математических терминов, Просвещение, Москва (1965), с. 10.
10. И. Я. Яглом, Комплексные числа, Физматгиз, Москва (1962), с. 13.
11. А. О. Фосс, О сущности математики, Книгоиздат, С.-Петербург (1911), с. 34.
12. К. В. Фролов, Вибрационная биомеханика, Наука, Москва (1989), с. 11 - 18.
13. V. A. Bunin, "Propagation pecularities of vibrations in inhomogeneous and anisotropical medium connected with some problems of biomechanics", in: Man under Vibration: Proc. of the 2nd Int. CISM-IFTOMMSymp., Moscow (1985), p. 31 - 35.
14. В. А. Бунин, "Е. С. Федоров как математик", Тезисы докладов Международной конференции "Пространственные группы симметрии и их современное развитие", Ленинград, 14 - 18 мая 1991 г., АН СССР, Москва (1991), с. 44.

15. Ф. Клейн, в кн.: Лекции о развитии математики в XIX столетии, Т. 1, Наука, Москва (1989), с. 189-192.
16. Р. Декарт, Правила для руководства ума, ГСЭИ, Москва - Ленинград (1936).
17. В. А. Бунин, М. С. Калинин, "Интерпретация n-мерных пространств", Сборник трудов НВИИ, № 11, Красноярск (1971), с. 207-212.
18. O. B. Balakshin, V. A. Bunin, "Multidimensional symmetry and its adequate graphic-analytical representation in the system "man-machine-environment", Symmetry of Structure: Abstracts of the 1st Interdisciplinary Symmetry Symp., Budapest (1989), p. 25-27.
19. В. А. Бунин, "Единые электро-гравитационные уравнения математической физики", Труды МОИП. Секция физики, вып. 1, Изд-во МГУ, Москва (1965), с. 4-8.
20. В. А. Бунин, Ю. К. Дидык, З. Огжевальский, "Современные взгляды на соотношения вакуума с полем и веществом", Вопросы превращений в природе, Айастан, Ереван (1971), с. 75 - 89.
21. В. А. Дубровский, "Упругая модель физического вакуума", ДАН СССР, 282(1), 83 - 88.
22. В. А. Бунин, "Система передачи и приема сигналов с помощью гравитационных волн". А.с. СССР № 347987 02.03.59 г.
23. В. А. Бунин, Б. И. Борщев, С. М. Егудов, "Звуковод для передачи механических колебаний", А.с. СССР№ 122173 21.11.58 г.
24. В. А. Бунин, М. К. Усков, "Оценка предельных функциональных возможностей новых поколений техники", Тезисы докладов Всесоюзной на-

учной конференции "Совершенствование планирования, разработки и внедрения новых поколений техники", Москва, 18-19 ноября 1986 г., ВНИИПИ, Москва (1986), с. 62 - 63.
25. В. А. Бунин, "Элементарные частицы как резонансные состояния вакуума и классификация их как открытых резонаторов", Труды МОИП. Секция физики, Изд. МГУ, Москва (1967), с. 71 - 72.
26. В. А. Бунин, "Восхождения и зигзаги математики (интервью)", Учительская газета, 28.06.90 г., с. 3.
27. О. И. Митрофанов, "Элементарные частицы — это элементарно", Изобретатель и рационализатор, N° 1,20 -23 (1983).

В.А.Бунин

СВЕРХСТЕПЕНЬ КАК НОВОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ*

Общеизвестно убыстрение ритма жизни и скоростей используемых в физике и технике процессов. Так, обнаружилось экспоненциально возрастатющее накопление информации, широкое применение находят взрывные, импульсные и т.п. быстропеременные процессы.

Кроме экзотических грубо-разрывных функций типа дельта-функции, практически единственные функции, иногда непосредственно (без сооружения из них рядов, интегралов Фурье и т.д.) пригодные для описания быстрых процессов – степенные. Очевидный недостаток этих функций – сравнительная медленность их изменения, заставляющая прибегать для "убыстрения" к искусственным приемам вроде упомянутых рядов и интегралов, операционного исчисления и др. Краткое рассмотрение пути, которым математика пришла к действию возведения в степень (и обратному – корню) показывает, что экстраполяцией этого пути можно построить более сильные (в смысле описания быстрых процессов) действия: "сверхстепень" (и обратное – "сверхкорень"). Эти новые математические действия интересны также с точки зрения выяснения возможности выхода из поля комплексных чисел и получения иных, более общих (сверхкомплексных) чисел, которые неудачно пытались "условно" построить, комбинируя обычные комплексные числа методом кватернионов Гамильтона. Ход развития математики показывает, как введение новых действий порождало обобщение понятия числа:

1. Дополнение сложения вычитанием привело к невозможности решения уравнений типа 5-6=X в

* "Математическая физика. Электродинамика. История физики", М., МОИП, секция физики, 1967, с.71-73.

положительных числах X. Чтобы уравнение решалось пришлось ввести отрицательные числа.

2. Дополнение умножения делением привело к невозможности решения уравнений типа 5/6=X в целых X. Пришлось ввести дробные числа, а позднее родственные им числа иррациональные и трансцендентные.

3. Дополнение возведения в степень извлечением корня привело к невозможности решения уравнений типа √-1=X ни в дробных, ни в целых, ни в отрицательных числах и были введены мнимые числа.

Вся совокупность известных чисел к настоящему времени охватывается понятием комплексное число. Возникает законный вопрос: закончилось ли на этом развитие понятия числа? Не существуют ли иные, более общие действия и уравнения, неразрешимые в поле комплексных чисел и требующие для своего разрешения неких "сверхкомплексных" чисел? Где в безграничном океане уравнений наиболее вероятно их встретить? Какова польза для математической физики от введения таких новых уравнений?

Внимательный анализ этапов 1, 2, 3 развития математики (интегральное и дифференциальное исчисление очевидно лежат в стороне от этих этапов и они скорее отвлекали внимание от поиска новых этапов, чем способствовали их нахождению) с несомненностью и однозначно показывает, что эти функции имеют характер по отношению к степенным такой же, как степенные – к умножению, а оно к сложению. Иначе говоря, искомые функции – некая "пошедшая вразнос" степень. Назовем эти функции "сверхстепенными" и обозначим $b \nearrow a = X$, например $6 \nearrow 5 = X$ (1)

В обычных обозначениях (1) для взятого примера выглядело бы так:

$$5^{[5^{\{5^{[5^{(5^5)}]}\}}]} = X$$

(2)

Спрашивается, зачем нужны обозначения (1), если известны (2)? Ответ станет ясен, если вспомним, зачем понадобилась, например, степень, то есть обозначение 5^6, если можно было обойтись ранее известным обозначением умножения $5х5х5х5х5х5$? Помимо резкого сокращения степенной записи по сравнению с умножением, сразу удалось получить принципиально новую возможность: например, $5^{0,1}$ вообще невозможно записать умножением и т.д. Так же и с (1) – (2): выражения (1) типа $0,1 \nearrow 5$, $-3 \nearrow 5$, $\sqrt{-1} \nearrow 5$ и т.д. вообще непредставимы в виде (2), что и обусловливает новые возможности для расширения понятия числа за пределы поля комплексных чисел.

Действие, обратное (1) назовем "сверхкорень" и обозначим так:

$$b \swarrow a = X \qquad (3)$$

Записать сверхкорень через обычные действия в общем случае, так же как и сверхстепень, не представляется возможным. Действия (1) (3) были исследованы нами с 1952 г. и введены в 1958 г. в неподлежавшей опубликованию по причинам прикладного характера работе.

Очевидно, что $$b \nearrow b \swarrow a = a \qquad (4)$$
то есть знаки $\nearrow$ и $\swarrow$ обратны и взаимно компенсируются. Выбирая величины *b, a* из поля комплексных чисел и получая в отдельных случаях уравнения неразрешимые в поле комплексных Х в (1) (3), приходим к необходимости выхода из поля комплексных чисел. При этом мы следуем Эйлеру, считавшему, что любое уравнение имеет решение и что большой удачей является не факт решения уравнения, а факт нахождения уравнения, не разрешимого в известных числах, ибо именно такое уравнение служит развитию понятия числа, то есть развитию самых глубоких основ математики.

Таким образом, не отнимая у специалистов возможности дальнейшего творчества, можно ограничиться установлением следующих в порядке возрастания сложности математических действий:

1. Сложение *(a+b)*, вычитание *(a-b)*
2. Умножение *(a*х*b)*, деление *(a/b)*

3. Возведение в степень (a^b), извлечение корня $\sqrt[b]{a}$
4. Возведение в сверхстепень $b \nearrow a$,извлечение сверхкорня $b \swarrow a$

Детальное изложение свойств действия 4 выходит за рамки настоящей работы, как и изложение дальнейших обобщений, которые, разумеется, бесконечны, и в этом смысле развитие основ, "азов" математики так же бесконечно, как и развитие учения об элементах материального мира, как бесконечна, например, неисчерпаемость электрона. Именно поэтому математики и хватает в качестве адекватного инструмента для изучения материального мира, что она по возможностям развития "не беднее" его.

В.А.Бунин, В.А.Чудинов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ О МАКСИМАЛЬНО ШИРОКОПОЛОСНОМ НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ БЕЗ ОТРАЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧИСЕЛ НОВОЙ ПРИРОДЫ*

Рассматривается пример применения новых чисел к решению задач электродинамики о максимально широкополосном волноводе без отражений.

Проиллюстрируем применение новых чисел сравнительно несложным примером плоской электродинамической задачи, ранее решенной [1] обычным методом комплексных амплитуд. Совпадение результатов буде служить подтверждением правильности нового метода.

Пусть вдоль координаты ξ плоской криволинейной ортогональной системы координат ξ, η, ζ с метрическими коэффициентами

$$h_\xi=h_\eta=h;\ h_\zeta=1 \qquad (1)$$

на вход плоского неоднородного волноводного узла (с изломом волновода, ступенькой, для рупорного излучателя или с иной неоднородностью) подаются волны типа Н с компонентами

$$E_\xi=0,\ E_\eta=0,\ E_\zeta\neq0,\ H_\xi\neq0,\ H_\eta\neq0,\ H_\zeta=0 \qquad (2)$$

Ставится задача: найти такой закон заполнения волновода средой без потерь

$$(\varepsilon,\ \mu)=f(\xi,\ \eta), \qquad (3)$$

при котором энергия проходила бы без отражений во всей полосе частот пропускания узла.

Уравнения Максвелла

$$rot\overline{E}+\mu\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}=0; rot\overline{H}-\varepsilon\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}=0 \qquad (4)$$

могут быть записаны в случае гармонических колебаний не только в привычном виде

---

* "Новые вопросы прикладной электродинамики" М., МОИП, секция физики, изд. "Наука", 1976, с.127-130.

$$rot\overline{E}_0 + i_1\omega\mu\frac{\partial\overline{H}_0}{\partial t} = 0; rot\overline{H}_0 - i_1\omega\varepsilon\frac{\partial\overline{E}_0}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

где вместо Е, Н в (4) взято

$$\overline{E}_1 = \overline{E}_0 \exp(i_1\omega t); \overline{H}_1 = \overline{H}_0 \exp(i_1\omega t); i_1 = 1, \qquad (6)$$

но и в столь же правомерном новом виде

$$rot\overline{E}_0 + i_2\omega\mu\frac{\partial\overline{H}_0}{\partial t} = 0; rot\overline{H}_0 - i_2\omega\varepsilon\frac{\partial\overline{E}_0}{\partial t} = 0, \qquad (7)$$

где вместо Е, Н в (4) взято

$$\overline{E}_2 = \overline{E}_0 \exp(i_2\omega t); \overline{H}_2 = \overline{H}_0 \exp(i_2\omega t), \qquad (8)$$

а i_2 и j взяты из работы [2]. За отсутствием места здесь не показывается, что введение новых чисел 6 ранга не приводит к изменению обычных операций дифференцирования. Число i_2 вводится специально для того, чтобы сохранить привычный вид выражений. Напомним, что

$$i_2 = i_1 j \qquad (9)$$

и

$$j^2 = +1;\ exp(j\varphi) = ch\varphi + jsh\varphi. \qquad (10)$$

Эти свойства позволяют обойти трудности метода комплексных амплитуд в нелинейных случаях. Решая (5) и (7) методом разделения переменных, получим волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{f_2}\cdot\frac{\partial E_{0\zeta}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{f_2}\cdot\frac{\partial E_{0\zeta}}{\partial\zeta}\right) + \kappa_0^2 f_1 h^2 E_{0\zeta} = 0, \qquad (11)$$

где

$$\kappa_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0;\ f_1(\xi,\eta) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0};\ f_2(\xi,\eta) = \frac{\mu}{\mu_0}. \qquad (12)$$

Приняв закон заполнения узла

$$f_1 = \frac{a^2}{h^2};\ f_2 = 1, \qquad (13)$$

где a - константа с размерностью длины, получим обычное волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 E_{0\zeta}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 E_{0\zeta}}{\partial\eta^2} + \kappa_0^2 a^2 E_{0\zeta} = 0. \qquad (14)$$

Два решения (14) для амплитуд $E_{0\zeta}$, полученные при этом, имеют вид

$$E_{0\zeta 1,2} = A\exp(-i_{1,2}\sqrt{\kappa_0^2 a^2 - (m\pi)^2}\,\xi)\sin(m\pi\eta). \qquad (15)$$

С учетом временных множителей по (6) и (8) эти решения примут вид

$$E_{0\zeta 1,2} = A\exp(-i_{1,2}\sqrt{\kappa_0^2 a^2 - (m\pi)^2}\,\xi)\sin m\pi\eta \exp(i_{1,2}\omega t) \qquad (16)$$

Соответствующие решения для компонент $H_{\eta 1,2}$, необходимых для отыскания потока энергии, будут

$$H_{\eta 1,2} = \frac{-1}{h\omega\mu}\sqrt{\kappa_0^2 a^2 - (m\pi)^2}\,E_{0\zeta 1,2}\exp(i_{1,2}\omega t). \qquad (17)$$

Новое значение потока энергии будет

$$P = \int_s \mathrm{Re}(E_{\zeta 1} H_{\eta 2}) = const,$$

что совпадает с результатами работы [1]. Тем самым показана возможность применения в данной задаче чисел новой природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А Бунин Устранение отражений от неоднородностей волноводного тракта путем заполнения средами с переменными электрическими параметрами. Труды НИИ МАП СССР, вып.6 (50), М., 1957, стр.12-26.
2. В.А.Бунин, В.А.Чудинов Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы. Настоящий сборник.

В.А.Бунин, В.А.Чудинов

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ЧИСЕЛ НОВОЙ ПРИРОДЫ*

Рассматривается возможность введения чисел новой природы в задачи прикладной электродинамики

В задачах прикладной электродинамики, как известно, широкое применение нашли числа с мнимой единицей

$$i = \sqrt{-1} = i_1 \qquad (1)$$

Они используются в двух основных направлениях: для выражения гармонической зависимости от времени

$$(E_1, H_1) = (E_0, H_0) \cdot \exp(i, \omega t) \qquad (2)$$

и для выражения моногенной функции координат, например, в конформных отображениях, где справедливы двумерные уравнения Лапласа.

Ограничения, связанные с этими направлениями, объясняются недостаточностью единственной мнимой величины вида (1) для описания сложных процессов. Например, в таких выражениях, как $P = E \cdot H$, для получения правильных результатов при использовании метода комплексных амплитуд приходится прибегать к некоторым ухищрениям (испольлзованию сопряженных выражений, делению на 2). Это связано с тем, что действительная часть от произведения комплексных величин неассоциативна:

$$\mathrm{Re}(E_1, H_1) \neq \mathrm{Re}\, E_1 \cdot \mathrm{Re}\, H_1 \qquad (3)$$

Кроме того, попытки распространить метод конформных отображений на пространственные задачи не имеют успеха из-за отсутствия аналога мнимой единицы, которую следовало бы отложить по третьей оси.

На устранение этих недостатков нацелены введенные ранее [1] числа новой природы: j и i_2. Эти числа возникают

---

* "Новые вопросы прикладной электродинамики" М., МОИП, секция физики, изд. "Наука", 1976, с.124-126

следующим образом. Обозначим операцию сложения операцией третьего ранга, и вместо знака "+" будем писать цифру $\underline{3}$. (Черточка внизу отличает число ранга от обычных чисел; сложение мы предлагаем считать операцией третьего ранга по ряду соображений, не имеющих отношения к цели данной статьи и потому здесь не рассматриваемых). Вместо умножения будем писать $\underline{4}$, вместо возведения в степень - $\underline{5}$ и т.д. Тогда $2\underline{6}3$ означает 3^3, $3\underline{6}3$ - 3^{3^3} и т.д. Обратные операции обозначим цифрами со знаком "-": $\underline{-3}$ – вычитание, $\underline{-4}$ – деление, $\underline{-5}$ – извлечение корня (логарифмирование в данной статье не рассматриваем), $\underline{-6}$ – извлечение корня степени *x* из *x* и т.д. Например, $3\underline{-6}19683=3$, поскольку $3\underline{6}3={}^{3}3=3^{3^3}=19683$. Если в записи вида $a\underline{R}x$, где *a* – показатель, *x* – основание и *R* – ранг, *a* оказывается нецелым, то выражения *a-6x* несводимы к комплексным числам в общем случае. Так, например, несводимо к комплексным числам число $j=i\underline{-6}-1$. (Доказательство несводимости очень громоздко и здесь не приводится).Квадрат $j=+1$, что непохоже на квадрат $i=-1$. Для подчеркивания сходства между *i* и *j* можно ввести их линейную комбинацию *ij*, где

$$ij=-1=i_2 \qquad (4)$$

Свойства новых чисел можно получить из так называемой "формулы спуска"

$$\frac{1}{a}-\underline{6}x=\frac{\ln(\frac{1}{(a+1)}-\underline{6}x)}{\ln(x)} \qquad (5)$$

Благодаря использованию чисел новой природы выражение (3) можно сделать ассоциативным:

$$\mathrm{Re}(E_1\cdot H_2)=\mathrm{Re}(E_0\exp(i_1\omega t)\cdot H_0\exp(i_2\omega t))=E_0H_0\cos^2\omega t$$

Путем достаточно сложных выкладок могут быть введены и условия моногенности (независимости производной от направления) для числа измерений больше двух. Так, для функции

$$\overline{T}=\overline{T}(\overline{\omega}) \qquad (6)$$

где

$$\overline{T}=i_1x_1+i_2x_2+i_3x_3+i_4x_4=1x_1+\sqrt{-1}x_2+\sqrt{-1}(-1\underline{-6}-1)x_3-(-1\underline{-6}-1)x_4 \qquad (7)$$

условия моногенности принимают вид

$$\square \; \overline{T} = 0 \tag{8}$$

и в частном случае плоской задачи сводятся к условиям Коши-Римана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Бунин Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов. В сб. МОИП "Математическая физика. Электродинамика. История физики", М., 1967, стр. 71-73.
2. В.А.Бунин, В.А.Чудинов Решение задачи электродинамики о максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы. В наст. сборнике.

СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫЙ 3-МЕРНЫЙ ВОЛНОВОД В ВИДЕ СПИРАЛИ*

1. ВВЕДЕНИЕ

Президент АН СССР ак. А.П. Александров, выступая на XXXVI Сессии Совета по координации научной деятельности [1], призвал ученых и инженеров к созданию оптимальных, т.е. наилучших по тем или иным параметрам изделий. Например, это могут быть равнопрочные и равноизносные изделия, звуководы [2] и волноводы [3] с предельно большой широкополосностью и т.д. Приведем первый пример нетривиальной формы 3-мерного сверхширокополосного волновода в виде объемной логарифмической спирали.

2. СИСТЕМА КООРДИНАТ

Используемая система координат ξ, η, ζ приведена на рис.1. Ее уравнение в проекциях на декартовы оси X, Y, Z имеет вид:

$$
\begin{aligned}
X &= e^{\xi\cdot(-1+\cos\zeta)\cdot\cos\varphi-\eta\cdot\sin\varphi}\cdot\cos[\eta\cdot\cos\varphi+\xi\cdot(-1+\cos\zeta)\cdot\sin\varphi]\cdot\cos(\xi\cdot\sin\zeta)\\
Y &= e^{\xi\cdot(-1+\cos\zeta)\cdot\cos\varphi-\eta\cdot\sin\varphi}\cdot\sin[\eta\cdot\cos\varphi+\xi\cdot(-1+\cos\zeta)\cdot\sin\varphi]\\
Z &= e^{\xi\cdot(-1+\cos\zeta)\cdot\cos\varphi-\eta\cdot\sin\varphi}\cdot\cos[\eta\cdot\cos\varphi+\xi\cdot(-1+\cos\zeta)\cdot\sin\varphi]\cdot\sin(\xi\cdot\sin\zeta)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Ортогональность (1) легко проверяется по трем общеизвестным условиям типа:

$$
\frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}=0 \qquad (2)
$$

Коэффициенты Ламэ, которые нам понадобятся в следующем разделе, выводятся по обычным соотношениям типа:

---

* Машинописный текст

$$h_\xi = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \xi})^2} \qquad (3)$$

3. ЗАПОЛНЕНИЕ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ШИРОКОПОЛОСНОСТЬ

Заполним волновод Рис.1 средой с параметрами:

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon_0} = \frac{a \cdot h_\xi}{h_\eta \cdot h_\zeta} \cdot F_1(\eta,\zeta) \qquad &&\frac{\mu_\xi}{\mu_0} = \frac{a \cdot h_\xi}{h_\eta \cdot h_\zeta} \cdot F_4(\eta,\zeta) \\
&\frac{\varepsilon_\eta}{\varepsilon_0} = \frac{a \cdot h_\eta}{h_\zeta \cdot h_\xi} \cdot F_2(\eta,\zeta) \qquad &&\frac{\mu_\eta}{\mu_0} = \frac{a \cdot h_\eta}{h_\zeta \cdot h_\xi} \cdot F_2(\eta,\zeta) \\
&\frac{\varepsilon_\zeta}{\varepsilon_0} = \frac{a \cdot h_\zeta}{h_\xi \cdot h_\eta} \cdot \frac{1}{F_2(\eta,\zeta)} \qquad &&\frac{\mu_\xi}{\mu_0} = \frac{a \cdot h_\xi}{h_\eta \cdot h_\zeta} \cdot \frac{1}{F_2(\eta,\zeta)}
\end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь a, F - произвольные величины.

Такой закон (4) заполнения, как можно непосредственно проверить путем подстановки его в уравнения Максвелла, обеспечивает сверхширокополосное распространение по волноводу полностью без отражений во всей полосе пропускания, а заодно и разделяемость волн на типы Е и Н. В частном случае коаксиала заполнение из анизотропного становится неоднородным.

4. ЗАМЕЧАНИЕ О ДРУГИХ 3-МЕРНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Разумеется, по аналогии с (4) могут быть решены задачи о спиральных звуководах. При использовании иных нетривиальных 3-мерных ортогональных координат аналогичным путем могут быть решены соответствующие электродинамические, гидродинамические и т.д. задачи математической физики. Для примера приведем на Рис. 2 несколько пространственных фигур (не самых сложных) из тех, для которых автором найдены уравнения ортогональных координат. Публиковать общий метод получения подобных координат нецелесообразно и он пока остается т.н. "ноу-хау" автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В.В., Бунин В.А. Отчет о XXXVI Сессии Совета по координации научной деятельности при Президиуме АН СССР, Вестник АН СССР, 12, 1979.

2. Бунин В.А. Звуковод для передачи механических колебаний, авт. свид. №122173, 21.11.1958 г., опубл. в Бюлл. изобр. №17 за 1959 г.

3. Бунин В.А., Чудинов В.А. Решение задачи электродинамики о максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы. Сборник "Новые вопросы прикладной электродинамики", Секция физики МОИП при МГУ, М., 1976.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ*

ДОРОГАЯ РЕДАКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ!

Я с радостью получил уже два тома энциклопедии, доволен их качеством и самим фактом выхода. Стремясь в меру сил сделать так, чтобы Ваша Энциклопедия была собранием не только ценных, но известных из других энциклопедий понятий, посылаю Вам две своих совершенно новых находки – ранее неизвестные нетривиальные трехмерные ортогональные системы координат:

1. УЛИТКА – объемная логарифмическая спираль
2. СЕРЬГА – тор переменного сечения.

Посылаю также для справок копии соответствующих статей, находящихся в печати в журнале "Математические заметки", где даны доказательства правильности, т.е. ортогональности этих координат. Таким образом, предлагаемые два результата абсолютно надежны и, вместе с тем, "пикантны", ибо ни один математик в мире подобных результатов не получал. Вряд ли Вам, как специалистам, нужно пояснять, что каждая новая система ортогональных координат ценна тем, что позволяет решать многие задачи мат. физики и техники, и что в косоугольных координатах вообще ничего не решишь.

Могу добавить, что я владею общим весьма мощным методом построения подобных координат, позволившим получить целый "математический натюрморт" из фигур, прилагаемых также для справки; если Вас заинтересуют некоторые из них – готов представить соответствующие материалы, подобные материалам на "УЛИТКУ" и "СЕРЬГУ". Если будут возникать "алфавитные трудности", готов для "переезда" в последние тома изменить названия или, например, дать одним названием: "ФИГУРЫ 3-МЕРНЫЕ" или т.п.

---

* Машинописный текст

ПРИЛОЖЕНИЕ:

1. УЛИТКА – объемная логарифмическая спираль – 2 экз.
2. СЕРЬГА – тор переменного сечения – 2 экз.
3. Бунин В.А. Объемная логарифмическая спираль ("УЛИТКА"), как нетривиальный пример 3-мерных ортогональных координат, журнал "Математические заметки", в печати, №5476, получено Редакцией 28.07.80 г.
4. Бунин В.А. Нетривиальный пример системы трехмерных ортогональных координат в виде тора переменного сечения ("СЕРЬГА"), там же, №5475
5. Рисунок "Математический натюрморт"

Зам. ученого секретаря при Презид. АН СССР
Бунин Валентин Алексеевич 7.11.80

КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА*

Объемная логарифмическая спираль – "Улитка" представляет собой совершенно естественное обобщение на три измерения знаменитой плоской кривой, т.н. равноугольной или логарифмической спирали. Напомним, что первым логарифмическую спираль начал изучать Декарт, затем Торичелли, а в конце XVII века многие замечательные свойства такой плоской кривой установил Якоб Бернулли. Эти необычные свойства произвели на него столь сильное впечатление, что одно из этих свойств он завещал высечь на своем надгробии: "Eddene mutata resurgo" (измененная, я возникаю той же [Пидоу Д., Геометрия и искусство, М., 1979 г.].

Обычную, плоскую логарифмическую спираль определяют обычно, как след точки, движущейся по плоскости так, что касательная в этой точке образует постоянный угол с радиус-вектором, проведенным из неподвижной точки. Эта плоская логарифмическая спираль, как система 2-мерных криволинейных ортогональных координат, описывается частным случаем уравнений координат "улитка":

$$X = e^{\xi\cdot\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi}\cdot\cos(\eta\cdot\cos\varphi + \xi\cdot\sin\varphi)$$

$$Y = e^{\xi\cdot\cos\varphi - \eta\cdot\sin\varphi}\cdot\sin(\eta\cdot\cos\varphi + \xi\cdot\sin\varphi)$$

Ортогональность такой плоской системы координат очевидным образом гарантируется конформностью отображения с Декартовой системы.

Наконец, пару слов об истории "сверхмнимых чисел", являющихся естественным обобщением мнимых и позволивших строить 3-мерные ортогональные отображения столь же эффективно, как это позволяют делать мнимые числа в 2-мерном случае. О существовании чисел, отличных от действительных и мнимых подозревали Гаусс в его докторской диссертации и Арган, однако, их попытки найти такие числа потерпели неудачу, а поскольку "природа не терпит пустоты", то место этих неоткрытых чисел занял "эрзатц" в виде

* Машинописный текст. (без даты)

"кватернионов" Гамильтона, полуправильных хотя бы из-за некоммутативности. "Основная" теорема алгебры создала мнение о невозможности выйти из поля комплексных чисел, но это ошибка, т.к. "основная" относится к действиям не выше третьей ступени – к степенным многочленам, как и основанная на ней "теорема Фробениуса". У нас же использованы действия 4 ступени: "сверхстепень" и т.д.

Задача N

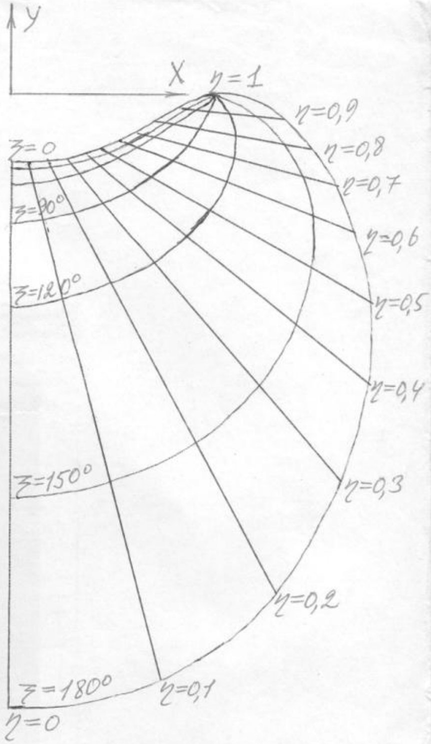
„Изогнутый эллипсоид"

Известно:

Уравнение неизогнутого эллипсоида (или эллипсоида)

Найти:

Уравнение изогнутого эллипсоида в виде соответствующей триортогональной системы координат ξ, η, ζ



Пример решения:

$$X = b\xi\eta / B$$

$$Y = -\left[b\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\zeta + 2\right] / B$$

$$Z = -b\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\zeta / B$$

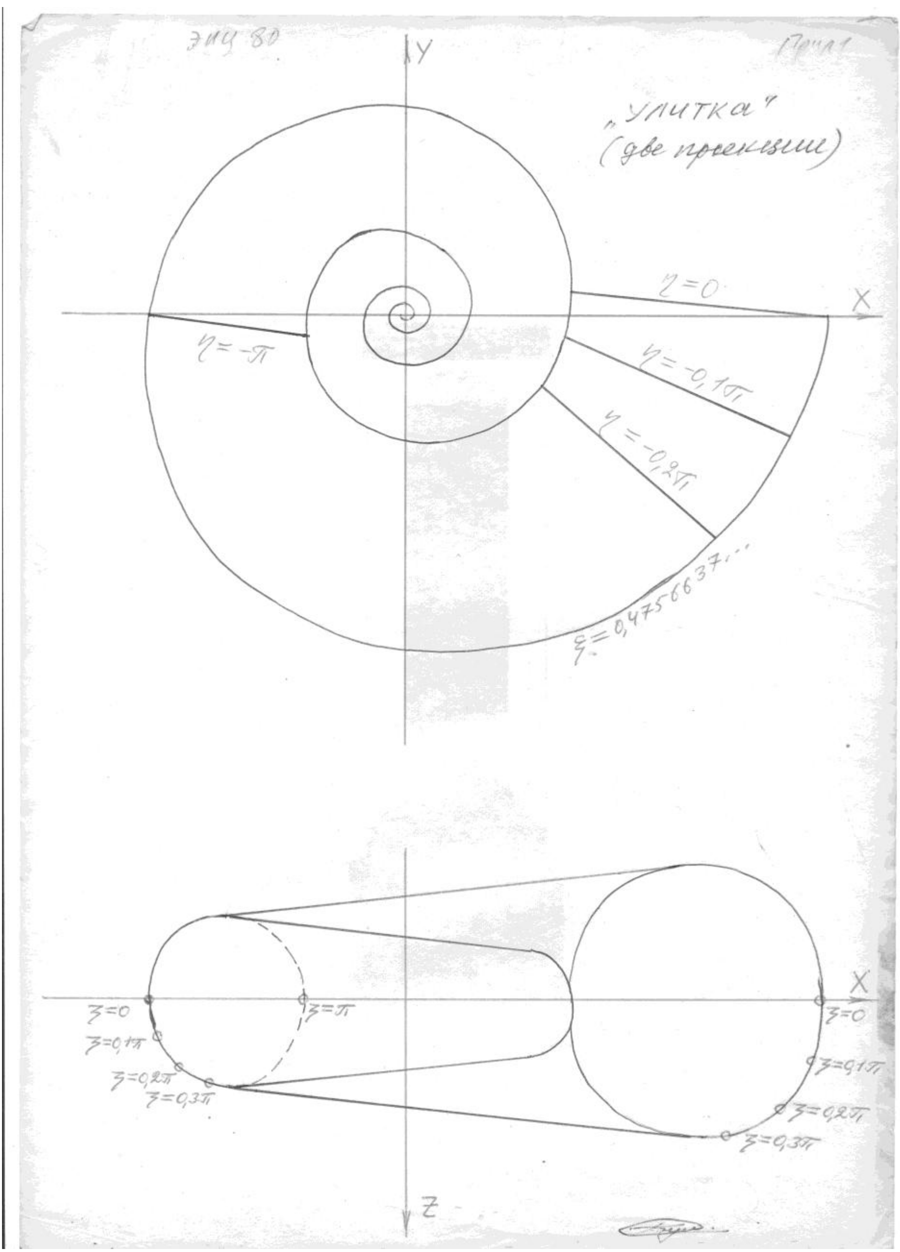
$$B = (b\xi\eta)^2 + b^2(\xi^2-1)(1-\eta^2) + 4b\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\zeta + 4; \quad b=\sqrt{3}$$

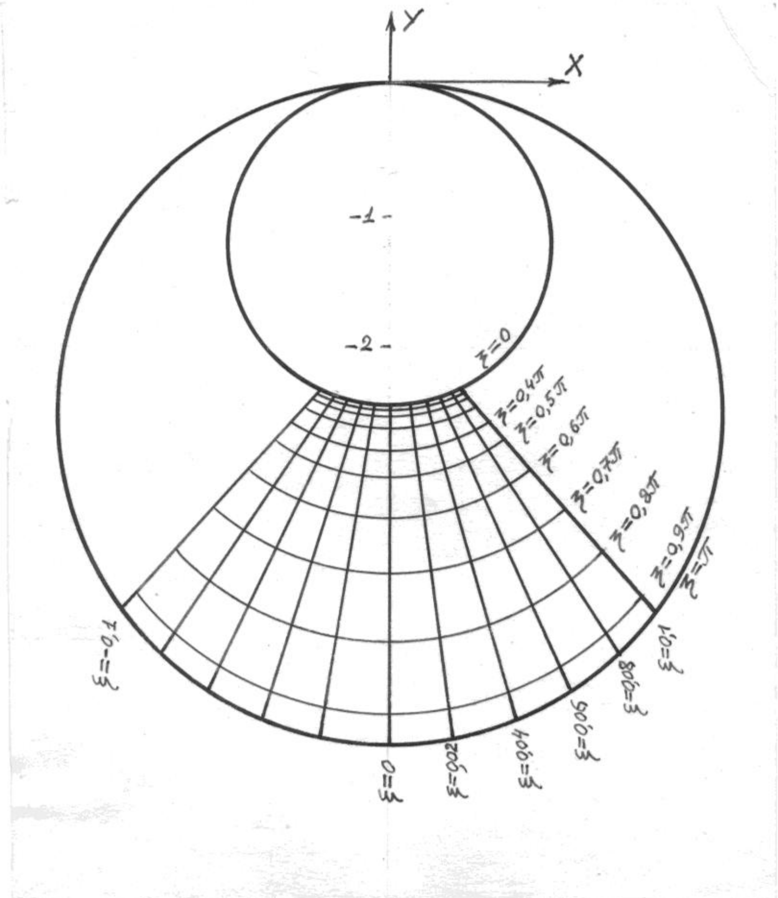
(см. рис.)

Формулы для проверки правильности (триортогональности) решения

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Бунин Валентин Алексеевич


ЭИЦ 80
Прил1
„УЛИТКА"
(две проекции)
Y
X
η=0
η=-π
η=-0,1π
η=-0,2π
ξ=0,47566637...
Z
ζ=0
ζ=0,1π
ζ=0,2π
ζ=0,3π
ζ=π



Y
X
-1-
-2-
ξ=0
ξ=0,4π
ξ=0,5π
ξ=0,6π
ξ=0,7π
ξ=0,8π
ξ=0,9π
ξ=π
ξ=-0,1
ξ=0
ξ=0,02
ξ=0,04
ξ=0,06
ξ=0,08
ξ=0,1

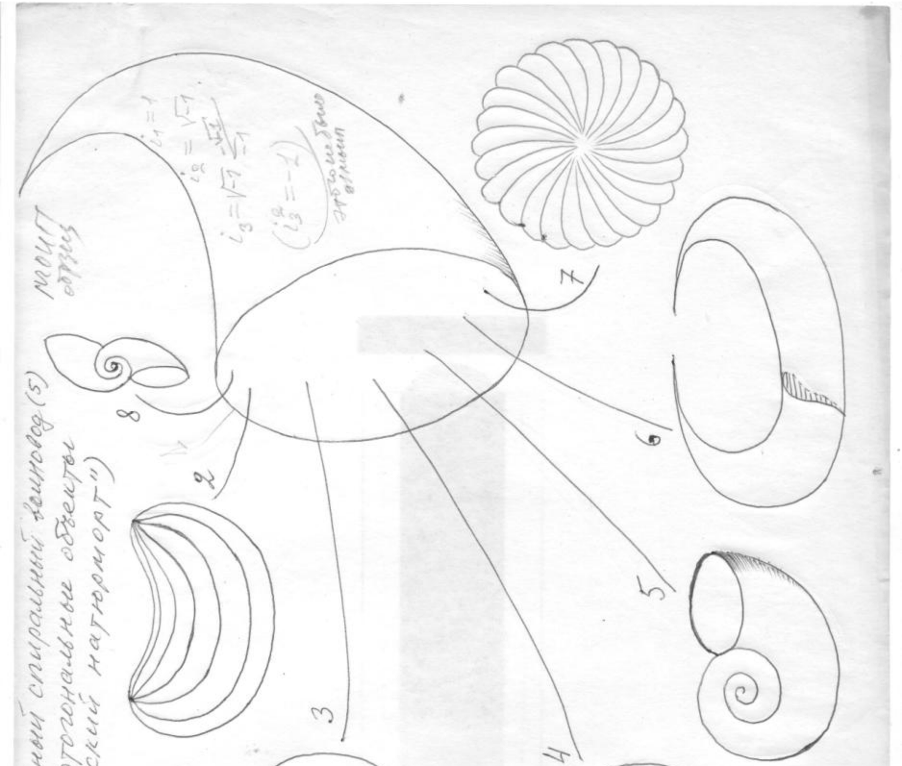


Рис.2. Сверхширокополосный спиральный волновод (5)
и другие объемные ортогональные объекты
(„Математический натюрморт")
1. „Рог изобилия"
2. „Огурец"
3. „Серьга"
4. „Груша"
5. „Улитка"
6. 3-мерный профиль Жуковского
(„Летающая тарелка")
7. Многозаходная объемная спираль
(„Древнеармянский символ вечности")
8. Двухзаходная объемная спираль
(„Галактика")
МОИП
образец
$i_1 = 1$
$i_2 = \sqrt{-1}$
$i_3 = \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{-1}}{-1}$
$(i_3^2 = -1)$
1
2
3
4
5
6
7
8

СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЙ ТЕКСТ (не для печати)*

ДОРОГАЯ РЕДКОЛЛЕГИЯ!

1. Мне представляется, что "долг чести" математиков-теоретиков (в Вашем лице) либо дать достойный отпор новым действиям и числам (в моём лице), либо заняться их изучением или хотя бы публикацией. Обычно применяемая в подобной ситуации "фигура умолчания" не является в данном случае оптимальным решением, т.к. "джин уже выпущен из бутылки" : имеется пара десятков публикаций этому вопросу, в основном, прикладного толка, и вопрос не может "заглохнуть".

2. Будучи "старым патентным волком" (я с момента создания Комитета по изобретениям к открытиям в 1956 году являюсь его экспертом), должен заметить:

2.1. Всё "новое, но(?) не своё" почти всегда вызывает неприязнь, и это отчасти естественно

2.2. В делах, связанных с так называемой "интеллектуальной собственностью" (изобретения, открытия, публикации и др.), и за рубежом и в СССР принято во избежание "недоразумений" оставлять т.н. "ноу-хау". Сделано это и во всех моих публикациях, так что ни одна из прикладных задач типа приведенных в [1-3] не может быть решена, как мне представляется, ни одним математиком в обозримое время без моей помощи (даже при ознакомлении со всеми моими публикациями). Это моё утверждение просил бы рассматривать как нечто в роде "математического вызова" Вам, математикам-теоретикам с моей стороны.

3. Разумеется, весь полемический задор и "лирику" я готов убрать, т.е. переписать работу заново. Важно только знать "по двоичной системе" Ваше мнение: верна или неверна мысль о новых числах?

к.т.н. Бунин В.А.
22.1.82.

---

* Машинописный текст, (Судя по дате – в продолжение переписки с редакцией Математической энциклопедии (прим.сост.))

Бунин В.А.

ОБЪЕМНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ («УЛИТКА») ,КАК НЕТРИВИАЛЬНЫЙ ПРИМЕР 3-МЕРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ *

1.ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, математика за столетия весьма слабо снабдила 3-мерными ортогональными координатами достаточно общего вида математическую физику, технику и техническую эстетику, для которых ценны именно ортогональные координаты. В математической физике "задачи, требующие неортогональных координат, почти никогда не решаются точно"[1]. В технике неортогональные системы неустойчивы, и можно даже заподозрить о существовании некоей "самоортогонализации" (так, круглый камень со склона горы катится до тех пор, пока направление его веса не станет ортогональным с направлением опоры. Да и в искусстве, в промышленной эстетике не в ходу "косоугольные" объекты, например, изображения "перекосившейся избушки" (и не исключено, что "красота"- это неосознанная полезность, надежность и т.п.).

Известные 3-мерные ортогональные координаты, как правило, тривиальны в том смысле, что фактически не 3- ,а 2-мерны (например, геометрия сферических, цилиндрических и т.п. координат по азимуту неизменна).

Требуется доказать ортогональность новой, нетривиальной системы координат- объемной логарифмической спирали (для краткости и образности автор дает ей имя "УЛИТКА")."Улитка"представляет собой "обобщение на 3 измерения" знаменитой плоской кривой - т.н. равноугольной или логарифмической спирали. Напомним, что первым логарифмическую спираль начал изучать Декарт, затем Торичелли, а в конце XVII века многие замечательные свойства такой плоской кривой установил Якоб Бернулли. Эти необычные свойства произвели на него столь сильное

* Машинописный текст

впечатление, что одно из этих свойств он завещал высечь на своем надгробии: "Eadem mutata resurgo"
(измененная, я возникаю той же) [2].

Логарифмическую спираль определяют обычно, как след точки, движущейся по плоскости так, что касательная в этой точке образует постоянный угол с радиусом-вектором, проведенным из неподвижной точки.
Эта плоская кривая - логарифмическая спираль, как известно [2], может быть описана уравнением:

$$\begin{aligned} X &= e^{\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi}\cdot\cos(\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi) \\ Y &= e^{\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi}\cdot\sin(\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi) \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь X,Y - Декартовы, ξ,η - криволинейные координаты. Ортогональность плоской системы координат очевидным образом гарантируется конформностью отображения, переводящего Декартову систему в систему ξ,η.

Целью настоящего сообщения является доказательство ортогональности обобщающего на объем выражение (1) соотношения (2):

$$\begin{aligned} X &= e^{\xi(-1+\cos\zeta)\cos\varphi-\eta\sin\varphi}\cdot\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cdot\cos(\xi\cdot\sin\zeta) \\ Y &= e^{\xi(-1+\cos\zeta)\cos\varphi-\eta\sin\varphi}\cdot\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi] \\ Z &= e^{\xi(-1+\cos\zeta)\cos\varphi-\eta\sin\varphi}\cdot\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cdot\sin(\xi\cdot\sin\zeta) \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь X, Y, Z –Декартовы, ξ,η,ζ -криволинейные координаты. Ортогональность (2) проиллюстрирована расчетом и соответствующим рисунком, на котором принято значение константы $\varphi=\dfrac{-2\pi}{\ln(1-\tau)}$, где τ -0,6186339887498948482...-корень функционального уравнения $1+\tau=\dfrac{1}{\tau}$. Такой выбор φ придает показанной на рисунке "улитке" особую "эстетичность" в связи с тем, что она приобретает свойства т.н. "золотого сечения".

Геометрический смысл τ это отношение радиальных размеров двух соседних витков "улитки".

Выражение (2) является точным и замкнутым, как и (1), и доказательство ортогональности (2) полностью решает поставленную задачу.

Для интересующихся методологическими аспектами, лежащими в основе (2) и иных пространственных обобщений плоских кривых, в конце будут даны краткие справки, не требуемые существом данной работы.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ «УЛИТКИ»

Правильность (2), т.е. ортогональность, докажем по известным условиям ортогональности [3]. Для(краткости ограничимся доказательством взаимной ортогональности только одной пары осей, например ξ и η:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}= \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2[\xi(-1+\cos\zeta)\cos\varphi-\eta\sin\varphi]}\cdot\{(-1+\cos\zeta)\cos\varphi\cos^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cos^2(\xi\sin\zeta)(-\sin\varphi)+\\
&+(-1+\cos\zeta)\cos^2\varphi\cdot\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cos^2(\xi\sin\zeta)[-\sin(\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi)]+\\
&+\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\sin^2(-1+\cos\zeta)\cos^2(\xi\sin\zeta)\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]+\\
&+\sin^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi](-1+\cos\zeta)\sin\varphi\cos^2(\xi\sin\zeta)\cos\varphi+\\
&+\cos^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi][\sin(\xi\sin\zeta)]\sin\zeta\sin\varphi\cdot\cos(\xi\sin\zeta)+\\
&+\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi][\sin(\xi\sin\zeta)]\sin\zeta\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cos\varphi\cos(\xi\sin\zeta)+\\
&+(-1+\cos\zeta)\cos\varphi\sin^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cdot(-\sin\varphi)+\\
&+(-1+\cos\zeta)\cos^2\varphi\cdot\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cdot\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]+\\
&+\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi](-1+\cos\zeta)(-\sin^2\varphi)\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]+\\
&+\cos^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi](-1+\cos\zeta)\sin\varphi\cos\varphi+\\
&+(-1+\cos\zeta)\cos\varphi\cos^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\sin^2(\xi\sin\zeta)(-\sin\varphi)+\\
&+(-1+\cos\zeta)\cos^2\varphi\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi][-\sin^2(\xi\sin\zeta)]\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]+\\
&+\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi](-1+\cos\zeta)(-\sin^2\varphi)\sin^2(\xi\sin\zeta)\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]+\\
&+\sin^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi](-1+\cos\zeta)\sin\varphi\sin^2(\eta\sin\zeta)\cos\varphi+\\
&+\cos^2[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cos(\xi\sin\zeta)\sin\zeta(-\sin\varphi)\sin(\xi\sin\zeta)+\\
&+\cos[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi]\cos(\xi\sin\zeta)\sin[\eta\cos\varphi+\xi(-1+\cos\zeta)\sin\varphi](-\cos\varphi)\sin(\xi\sin\zeta)\}=0
\end{aligned}$$

Остальные два условия ортогональности доказываются аналогично.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ "УЛИТКИ»

На рисунке приведены две проекции "улитки", рассчитанной по (2), а также несколько значений координат, не требующие комментариев.

4.ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные результаты (2, 3) новы и имеют законченный и недискуссионный характер. Выражения (2) точны, замкнуты и поддаются быстрому расчету практически не требуя никакого "программирования". Для сравнения укажем, что, не имея формул, подобных (2), большую работу по приближенному расчету камеры гидротурбины в виде тела, похожего на рассматриваемую "улитку", выполнила Проблемная лаборатория тонкостенных пространственных конструкций Киевского инженерно-строительного института, что потребовало решения около 10 тысяч уравнений [4]. Сравнение этого факта с расчетами по (2) лишний раз свидетельствует о том, что в "соревновании" между теоретической и вычислительной математикой, подобном соревнованию между толщиной брони и весом снаряда, последнее слово вряд ли будет сказано в обозримом будущем. Вместо споров между теоретиками и прикладниками о "пальме первенства" (уже проникших, кстати сказать, в широкую печать, вплоть до "Литературной газеты" и не способствующих авторитету математики) лучше, по-видимому, поискать путей объединяющих усилия.

Наконец, последнее. В настоящей работе неуместно изложение соображений, позволивших автору "угадать" обобщение (2), не только потому, что эти соображения опираются на давние, весьма дискуссионные и далеко не общепринятые утверждения автора [5, 6, 7], но просто потому, что правильность, т. е. ортогональность результата (2) в настоящей работе строго доказана и иные дополнения излишни. Для справки о работах [5, 6, 7] укажу, что они представляют собой несомненно дискуссионную попытку ответить на поставленный, но не решенный Гауссом (в его докторской диссертации) и Арганом [8] вопрос о нахождении неких "сверхмнимых" чисел, не сводимых к действительным и мнимым, и остро необходимых для откладывания вдоль третьей оси координат (конформные отображения непригодны для решения полноценных 3-мерных задач потому, что там просто "нечего" отложить вдоль третьей оси).

По мнению автора, не влияющему на правильность настоящего сообщения, этой же причиной - отсутствием указанных "сверхчисел" затрудняется и достижение полной адэкватности геометрии с анализом, задуманной Декартом, но не вышедшей за два измерения ни в его трудах, ни, тем более в трудах Гамильтона с его "некоммутативными" кватернионами, ни в трудах ряда других математиков.

Новый математизированный (2) геометрический образ-"улитка", как надеется автор, явится скромным пополнением скудного арсенала 3-мерных ортогональных координат и позволит очевидным образом решить ряд новых задач математической физики, техники и, быть может промышленной эстетики. В случае положительного мнения Редколлегии автор готов поделиться с читателями целым "математическим натюрмортом" из других 3-мерных ортогональных образов, таких, как: искривленный эллипсоид (для краткости и образности автор дал ему имя "огурец"), тор переменного округлого сечения ("серьга")[10], сфера с выступом ("груша"), 3-мерный "профиль Жуковского" ("крыло") и т.д. и т.п. вплоть до многомерных фигур [9].

К сожалению, публикация общего метода получения подобных образов преждевременна и остается т.н. "ноу хау" автора, ибо лежит вне рамок современной математики.

Кандидат технических наук, ст.н.с. В.А.Бунин
13.7.80

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс М.Ф. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, М, 1958
2. Пидоу|Д. Геометрия и искусство, М, 1979
3. Корн Г. и Корн Т., Справочник по математике, М, 1973
4. Варвак П.М., Варвак Л.П., Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций, М., 1977
5. Бунин В.А. Сверхстепень, как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов. Секция физики при МГУ, Итоговые заседания Секции, М 1967 стр.71-73
6. Бунин В.А., Чудинов В.А. Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы. Материалы совещания Секции физики МОИП при МГУ, М, 1976, стр. 124-126
7. Бунин В.А., Чудинов В.А. Решение задачи электродинамики о максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы, там же, стр.127-130
8. Молодший В.Н. Основы учения о числе в XYIII и начале XIX века, М, 1963
9. Бунин В.А., Калинин М.С. Интерпретация n-мерных пространств, Сборник научных трудов Норильского вечернего индустриального института, №11, Физико-технический выпуск, 1971, стр.207-212.
10. Бунин В.А. Нетривиальный пример 3-мерных ортогональных координат в виде тора переменного сечения ("серьга"), Математические заметки, настоящий выпуск.

Письмо Л.С.Понтрягину*

Дорогой Лев Семенович!

По нескольким отрывочным замечаниям в Ваших книгах "Метод координат" [1] и "Анализ бесконечно малых" [2] я понял, что Вы – один из немногих современных ученых, нацеливших свое и читателей внимание "не на изощренности типа теории множеств, теории пределов и т.п., а на главные математические результаты, сложившиеся в течение тысячелетий" [1, стр.4]. Меня также подкупили геометричность мышления и Ваше серьезное отношение к роли мнимых чисел. И, наконец, меня поразило название Вашей третьей книги, еще не написанной: "Многомерная Евклидова геометрия…" [1, стр.6] и глубочайшее уважение к аналитической геометрии, а не к голому, "безобразному" анализу и мышлению, в то время, как во всем мире буквально искореняется образное мышление, а значит и связь анализа с геометрией, и делается это начиная со школы.

Эти моменты целиком совпадают с моими мыслями, которые я вынашивал еще с 1942 г., когда окончив "круглым отличником" среднюю школу, мечтал о полной геометризации алгебры. Ориентируясь на эллинский вариант математики, я твердо верил, что геометрия – первична, а алгебра, анализ – вторичны, а адэкватность их должна сохраняться для любого числа измерений, как смутно высказывался еще Декарт, вопреки "построениям" Гамильтона, которые некоммутативны, т.е. "полуправильны".

Развивая генетически понятие числа, мне удалось ввести "сверхмнимые числа" и с помощью них разработать для трех измерений метод получения ортогональных координат столь же мощный, как конформные отображения для двух измерений. Возможно также нормальное, человеческое, Евклидово обобщение на любое число измерений.

Все, что я пишу – не реклама, а факт, для подтверждения которого и из уважения к Вам посылаю в подарок свои работы:

* Машинописный текст

1. "Сверхстепень, как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов", Секция физики МОИП при МГУ, Москва, 1967. – Работа методологически-общего характера, для первого знакомства с вопросом.
2. "Сверхширокополосный 3-мерный волновод в виде спирали", Сборник "Методы математической физики в прикладной электродинамике", Секция физики МОИП, в печати. –копия прикладной работы.

(Всего у меня около 600 публикаций и изобретений).

Мне обидно видеть разлад между математиками-вычислиителями и математиками-теоретиками. Считая своим долгом помогать тем "кого бьют", могу добавить: владея моим методом точного расчета трехмерных и даже более сложных объектов и соответствующей теорией "сверхмнимых" чисел, математики-теоретики могли бы вести расчеты на простых карманных машинках, без "напыщенного" программирования и результаты передавать прямо в промышленность, без "паразитных шестеренок" типа ВЦ, КБ и т.п.

Если данный вопрос покажется Вам заслуживающим внимания, просил бы передать для публикации, например, в "Математический сборник" абсолютно надежную, правильную и "высушенно-незадиристую" работу, полезную для ученых: "Нетривиальные примеры новых 3-мерных ортогональных координат". "Основная теорема алгебры, отпугнувшая на столетия математиков от попыток выхода из поля комплексных чисел, здесь не более, чем предрассудок, т.к. относится к действиям не выше третьей ступени – к степенным многочленам, как и основанная на ней теорема Фробениуса. Я же пользуюсь действиями ≥4 ступени.

Зам. ученого секретаря Совета по координации научной деятельности при Презид... АН СССР к.т.н. Бунин Валентин Алексеевич.   18.3.81

Бунин В.А.

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ НОВЫХ 3-МЕРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ*

Как известно, математика за столетия весьма слабо снабдила 3-мерными ортогональными координатами достаточно общего вида математическую физику, для которой ценны именно ортогональные координаты, т.к. "задачи, требующие неортогональных координат, почти никогда не решаются точно" [1]. К сожалению, лежащая в основе наиболее мощного метода получения ортогональных координат – метода конформных отображений – теория аналитических функций пригодна только для 2-мерных объектов. Известные 3-мерные координаты, как правило, тривиальны в том смысле, что фактически 2-мерны: например, геометрия сферических, цилиндрических, тороидальных и некоторых других координат неизменна относительно оси симметрии. В настоящем сообщении описаны три нетривиальные примера новых 3-мерных ортогональных координат. Для краткости и образности им даны "имена собственные".

§1. ТОР С СЕЧЕНИЕМ, МЕНЯЮЩИМСЯ ОТ НУЛЯ ДО КОНЕЧНОЙ ВЕЛИЧИНЫ – "СЕРЬГА"

Уравнения в проекциях на Декартовы оси X, Y, Z имеют вид: $\xi,\ \eta,\ \zeta$

$$X = \xi / A;\ \ Y = -(a+\eta\cdot\cos\zeta)/A;\ \ Z = -\eta\cdot\sin\zeta / A \qquad (1)$$

$$A = \xi^2 + (a+\eta\cdot\cos\zeta)^2 + \eta^2\cdot\sin^2\zeta$$

Здесь $\xi,\ \eta,\ \zeta$ - криволинейные координаты. $a = 0{,}3$ - параметр, выбранный из соображений "эстетичности рис.1, рассчитанного по (1).

* Машинописный текст, 18.3.81

§2. ТЕЛО В ВИДЕ ИЗОГНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА – "ОГУРЕЦ"

$$X = b\cdot\xi\cdot\eta / B;$$
$$Y = -[b\sqrt{(\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2)}\cdot\cos\zeta + 2] / B; \qquad (2)$$
$$Z = -b\cdot\sqrt{(\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2)}\cdot\sin\zeta / B$$
$$B = (b\cdot\xi\cdot\zeta)^2 + b^2\cdot(\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2) + 4\cdot b\cdot\sqrt{(\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2)}\cdot\cos\zeta + 4$$

$b = \sqrt{3}$ - параметр для рис.2.

§3. ЗАОСТРЕННОЕ ОВАЛЬНОЕ ТЕЛО В ВИДЕ СФЕРЫ С ВЫСТУПОМ – "ГРУША"

Для простоты опишем осесимметричный случай. Рис. не приводим.

$$X = (c + d\cdot\xi\cdot\eta) / C;$$
$$Y = -c\cdot\sqrt{(\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2)}\cdot\cos\zeta / C; \qquad (3)$$
$$Z = -c\cdot\sqrt{(\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2)}\cdot\sin\zeta / C$$
$$C = (c + d\cdot\xi\cdot\eta)^2 + (\xi^2-1)\cdot(1-\eta^2)\cdot c^2;\ c = 3;\ d = \sqrt{3}$$

§4 ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Правильность приведенных результатов (1-3), т.е. ортогональность легко (но весьма громоздко) проверяется по известным [2] условиям:

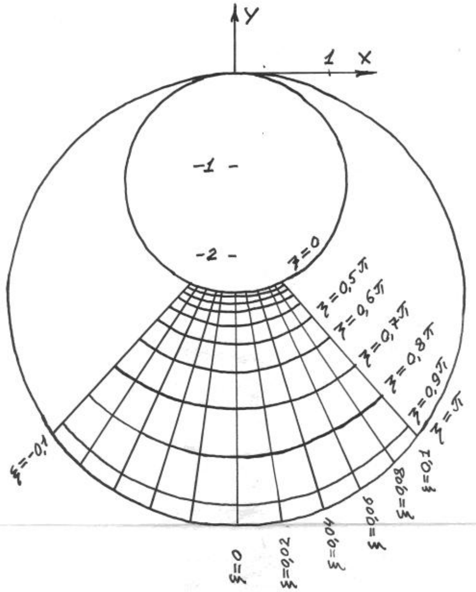
$$\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

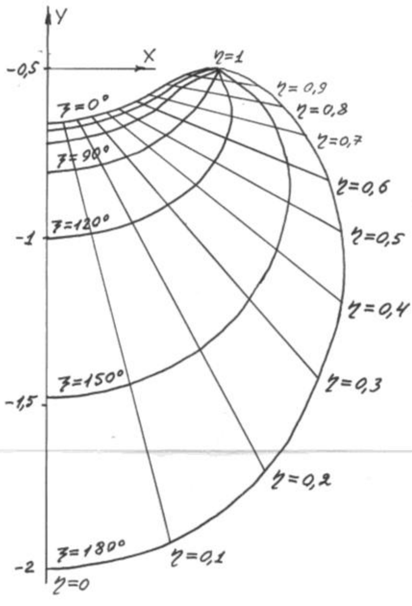
ЗАМЕЧАНИЕ

Изложенные результаты (1-3) новы и имеют законченный и недискуссионный характер. Значимость их заключается в том, что известными средствами описанные и многие другие аналогичные нетривиальные 3-мерные координаты, по-видимому, получены быть не могут. Результаты (1-3) приведены автором не только для демонстрации эффективных возможностей еще не опубликованного нового общего метода получения таких координат, базирующегося на лежащих вне рамок настоящего сообщения методических посылках [3-6], но и как новые конкретные координаты, пригодные для решения разнообразных пространственных задач математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс М.Ф. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.:Издательство иностранной литературы, 1958
2. Корн Г.и Корн Т. Справочник по математике. М.: Издательство "Наука", 1973
3. Бунин В.А. Сверхстепень, как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов.- Секция физики МОИП при МГУ, М., 1967, с.71-73
4. Бунин В.А., Чудинов В.А. Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы – Материалы совещания Секции МОИП при МГУ, М., 1976, с.124-126
5. Бунин В.А. Калинин М.С. Интерпретация n-мерных пространств – Сборник научных трудов Норильского вечернего индустриального института №11, 1971, с.207-212.
6. Бунин В.А., Чудинов В.А. История поиска и возможные перспективы развития "сверхмнимых чисел". МГУ, Научно-исследовательский семинар по истории математики и механики, доклад 7 апреля 1975 г.


Y
1 X
-1
-2
ξ=0
ξ=0,5π
ξ=0,6π
ξ=0,7π
ξ=0,8π
ξ=0,9π
ξ=π
ξ=-0,1
ξ=0
ξ=0,02
ξ=0,04
ξ=0,06
ξ=0,08
ξ=0,1


Y
X
-0,5
η=1
η=0,9
η=0,8
η=0,7
η=0,6
η=0,5
η=0,4
η=0,3
η=0,2
η=0,1
η=0
ξ=0°
ξ=90°
ξ=120°
ξ=150°
ξ=180°
-1
-1,5
-2

Бунин В.А.

О НЕПРИГОДНОСТИ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ И ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА ДЛЯ РАССМОТРЕНИЯ "ПАРАДИГМЫ ЗАМКНУТОСТИ ПОЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ" *

ВВЕДЕНИЕ

Современное науковедение все больше склоняется к мысли, что развитие в науке происходит не только путем наслаивания новых абсолютных истин на старые (т.н. "принцип соответствия"), но часто и путем смены "парадигм", т.е установившихся, ставших "общепринятыми" положений, постулатов, мнений. Парадигмы, как правило, в момент появления полезны, помогают разобраться в какой-то области знания, но позднее в силу своей не абсолютной истинности, а всего лишь "ограниченной правильности", превращаются в помеху дальнейшему развитию.

1. НЕПРИГОДНОСТЬ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РАССМОТРЕНИЯ "ПАРАДИГМЫ ЗАМКНУТОСТИ"

Основная теорема алгебры впервые была сформулирована в 1608 году Петером Роте, затем в 1629 году привлекла внимание А. Жирара и в 1637 году - Р. Декарта. Позднее этой теоремой занимался ряд ученых и считается, что первое строгое и полное её доказательство дал в 1799 году К.Гаусс [1]. Существует много формулировок этой теоремы, например: "Поле комплексных чисел является алгебраически замкнутым полем" [2].

Развитие понятия числа, подчиняющегося обычным законам арифметики, в том числе коммутативности, шло, как хорошо известно, путем пополнения натурального ряда чисел отрицательными, нецелыми ("ломаными" по удачной терминологии Л. Эйлера) и, наконец, мнимыми числами.

---

* Машинописный текст, датировано 22.01.1982

Подозрения и попытки Гаусса и Аргана [3] продолжить это развитие и отыскать иные "арифметические" числа не увенчались успехом (кватернионы , гиперкомплексы и т.п. построения, где в жертву приносятся те или иные основные арифметические законы, не суть развитие понятия числа в вышеуказанном смысле).

Можно привести множество несколько туманных и носящих характер не доказательств, а скорее "увещеваний", цитат о том, что появлением мнимых чисел завершилось развитие понятия числа:

"...расширение за пределы комплексных чисел невозможно, или, по крайней мере, излишне (? В.Б.), так что вычисления с комплексными числами обладают таким образом характером полной (? В.Б.) законченности"[4]; "Фундаментальное значение комплексных чисел для алгебры определяется в первую очередь тем фактом, что при переходе к уравнениям высших степеней не приходится (можно или нельзя? В.Б.) расширять множество чисел, добавляя...еще какие-либо числа "особого рода"...этот факт составляет содержание основной теоремы алгебры" [5].

Невольно настораживает не только обилие формулировок этой "основной" теоремы, а и постоянное, но нечеткое стремление выдвинуть ее в качестве синонима запрета на любые попытки дальнейшего развития "арифметического" понятия числа путем выхода из поля комплексных.

Чтобы показать неправомерность запрета со стороны основной теоремы алгебры на попытки выхода из поля комплексных чисел, вполне достаточно указать, что эта теорема и формулируется и доказывается исключительно в применении к действиям не выше третьей ступени (степенные многочлены). Стоит сделать еще по крайней мере один шаг и воспользоваться действиями 4-й ступени (сверхстепень, сверхкорень, сверхлогарифм), как это сделано в ряде наших работ, например [6-10], чтобы эта "основная" теорема оказалась просто не относящейся к делу: ведь не существует теоремы, которая бы аналогично основной теореме алгебры запрещала выход из поля комплексных чисел не через "калитку степенных многочленов", а мимо неё, например, использованием действий 4-й и более высоких ступеней, что и было сделано в [6-10], носящих, в основном, прикладной характер.

Пересказ этих работ здесь неуместен, и ограничусь только напоминанием, что суть их сводится к введению (взамен "кватернионов" Гамильтона и т.п. еще менее арифметических построений) новых величин (по терминологии, предложенной профессором Б. А.Розенфельдом [11] - "бунионов"), подчиняющихся законам обычной арифметики и основанных на следующих единицах:

$$i_1 = +1$$

$$i_2 = \sqrt{-1}$$

$$i_3 = \sqrt{-1} \cdot \overset{-\sqrt{-1}}{\swarrow} -1$$

Здесь полустрелка вниз в соответствии с [6] означает сверхкоренъ - обратное действие 4-й ступени. Использование этих единиц позволило создать весьма надежно работающий аппарат [6-11] трехмерных ортогональных отображений, не менее мощный, чем аппарат конформных отображений для 2-мерных задач.

2. НЕПРИГОДНОСТЬ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА ДЛЯ "ПАРАДИГМЫ ЗАМКНУТОСТИ"

Проследим небольшую часть вывода теоремы Фробениуса: "Воспользовавшись основной теоремой алгебры... доказана теорема Фробениуса: над полем действительных чисел не существует никаких систем гиперкомплексных чисел, обладающих всеми свойствами числового ряда" [12]. Совершенно ясно, что использование при выводе основной теоремы алгебры делает теорему Фробениуса столь же непригодной для решения вопроса о возможности или невозможности выхода из поля комплексных чисел, как и сама основная теорема.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенное позволяет сделать вывод, что как одна, так и вторая из двух указанных теорем "...по своему характеру и научному уровню не подходит..." [13] в качестве запрета попыток "арифметического" развития понятия числа. Разумеется, непригодность указанных теорем является только необходимым, но еще не достаточным условием и априори автоматически не гарантирует успеха в поиске новых чисел, но это уже иной вопрос, лежащий вне рамок настоящего сообщения.

В связи с выявившейся очевидной перспективностью новых чисел для прикладных вопросов, особенно построения 3-мерных ортогональных образов, автор считает своевременным не только привлечение внимания математиков-теоретиков, но и постановку вопроса о расширении школьного курса алгебры на действия 4-й и более высоких ступеней.

Кстати, вопрос об использовании новых действий и чисел вплоть до школьного курса по моей инициативе был поднят широкой печатью и вызвал большой интерес [14 и др.]. "По своему характеру и научному уровню" действия 4-й ступени и порождаемые ими вполне аналогичные "мнимым числам" "сверхмнимые числа" (я их иногда для простоты именую "числами 4-й ступени", "числами 5-й ступени" и т.д.) вполне доступны хорошим ученикам старших классов, в чем я убедился еще в 1942 году, кончая "круглым отличником" десятилетку, когда зародились у меня первые мысли о новых действиях и числах (к сожалению, не по моей вине этот вопрос пришлось отложить на много лет).

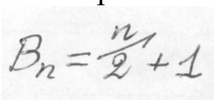
Разумеется, множество новых чисел, упоминаемых здесь, ограничено не рамками (1-3), а рамками настоящего сообщения.

ЗАМЕЧАНИЕ (в основном, для Рецензента; если дело дойдет до печати, в чём я далеко не уверен, то это Замечание, как впрочем и прочие "лирические" места, можно сократить или изъять).

Настоящее сообщение не просто очередная публикация (их и изобретений у автора около 600), а прежде всего попытка привлечь внимание математиков-теоретиков к серьезному вопросу, уже обратившему на себя внимание практиков. Использование новых действий и чисел открывает новые возможности не только перед прикладниками, но и вплоть до самых отвлеченных вопросов, таких, например, как теория чисел. Так, весьма заманчиво заменить не оправдавшую себя формулу Ферма простых чисел

$$F_n = 2^{2^n} + 1; \quad n = 0, 1, 2 \; ...$$

на "сверхстепенную":



Не менее интересно изобрести и разработать вычислительные машины для "сверхстепенных" функций и арифметических операций с векторами в пространстве 3-х и даже более измерений и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вилейтнер Г. Хрестоматия по история математики. М., ГТТИ, 1932
2. Мантуров О.В. и др. Толковый словарь математических терминов. М., Просвещение, 1965.
3. Молодший В.Н. Основы учения о числе. М., Учпедгиз, 1965.
4. Фосс А. О сущности математики. С.-Петербург.: Екатерингофское печатное дело, 1911.
5. Яглом И.М. Комплексные числа. М.:Физматгиз,1963.
6. Бунин В.А. Сверхстепень, как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов.-Секция физики Московского общества испытателей природы при МГУ, М., 1967, с.71-73.
7. Бунин В.А., Чудинов В.А. Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы.-Материалы совещания Секции физики Московского общества испытателей природы при МГУ. М.,1976, с.124-126
8. Бунин В.А. , Чудинов В.А.Решение задачи электродинамики о максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы.-там же,с.127-130.
9. Бунин В.А., Калинин М.С. Интерпретация n-мерных пространств.-Сборник научных трудов Норильского вечернего индустриального института №11, 1971, с.207-212.
10. Бунин В.А. К вопросу о ненаглядности многомерных объектов математической физики: контрпримеры к "парадигме ненаглядности".-Московское общество испытателей природы при МГУ, Подсекция общей

физики, доклад 13.11.1981.
11. Бунин В.А., Чудинов В.А. История поиска и возможные перспективы развития "сверхмнимых чисел". МГУ, Научно-исследовательский семинар истории математики и механики, доклад 7.4.1975.
12. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. .:Учпедгиз,1939.
13. Понтрягин Л.С. Отзыв на рукопись "Нетривиальные примеры новыхортогональных координат" (копия прилагается)
14. Пресняков А.Г. Полнится палитра алгебры, Эврика.-Мол. гвард,1976

Академия Наук СССР
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Глубокоуважаемый Валентин Алексеевич!

Представленная рукопись (2 стр.) по своему характеру и научному уровню не подходит для публикации в журнале "Математический сборник".

Гл.редактор /Л.С.Понтрягин/

Л. Понтрягин

В.А. Бунин, В.В. Бунин

СВЕРХСТЕПЕНЬ, СВЕРХКОРЕНЬ...*

Микропроцессоры, ведущие вычисления с комплексными числами, еще не существуют. Существующие же, предназначенные для операций с действительными числами, выполняют лишь сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня. Между тем путь, приведший математиков к определению этих действий, естественным образом может быть продолжен дальше. Новые операции позволяют получить числа новой природы, а те, в свою очередь, обещают интересные практические приложения.

Вспомним, как определяется умножение некоторого целого положительного числа a на целое положительное число n: это сложение числа a с самим собой, выполненное n раз. Аналогично возведение числа a в степень n - это n-кратное умножение a на себя. А если возведение числа a в степень a выполнить n раз? Эту операцию и называют возведением в сверхстепень n. Вот несложные примеры этой операции, а заодно употребительное для нее обозначение (а=2.3; n = 3):

$$2^{2^{2}} = {}^{3}\nearrow 2 = 16; \quad 3^{3^{3}} = {}^{3}\nearrow 3 = 7625597484987$$

Займемся теперь действиями, обратными по отношению к перечисленным, например, к сложению. Складывая два положительных числа, мы всегда получим опять-таки положительное. Но вычитание большего положительного числа из меньшего заставляет нас ввести понятие отрицательного числа. Сходным образом деление некратных целых чисел приводит к появлению дробей, извлечение квадратного корня из отрицательного числа - к мнимым величинам...

Свой вклад в подобный процесс «конструирования» новых чисел может дать и возведение в сверхстепень, точнее, обратная к нему операция - извлечение сверхкорня. Используя одни из предыдущих примеров, нетрудно сообразить, что сверхкорень третьей степени из 16 равен 2. Записывается это так:

---

* Наука и жизнь, 1989, №10, с.140.

$$^{3}\!\swarrow 16 = 2$$

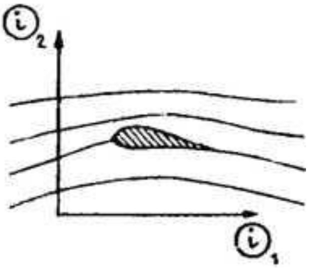
Но что такое, например, сверхкорень степени $-\sqrt{-1}$, извлеченный из $\sqrt{-1}$? Оказывается это число совершенно новой природы. Оно находится в определенной взаимосвязи с ранее известными, "основополагающими" числами – единицей и мнимой единицей:

$$\textcircled{i}_1 = 1,\ \textcircled{i}_2 = \sqrt{-1},\ \textcircled{i}_3 = \sqrt{-1}\cdot {}^{-\sqrt{-1}}\!\swarrow(-1),$$

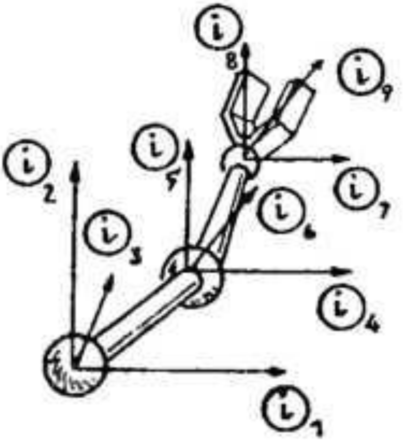
$$\textcircled{i}_1^2 = 1,\ \textcircled{i}_2^2 = -1,\ \textcircled{i}_3^2 = -1$$

Здесь самое время задать вопрос: а зачем нужны эти нововведения? Какой от них прок?

Хорошо известно, какую пользу приносит применение комплексных чисел, например, в гидродинамике. Но там они эффективны лишь при решении так называемых плоских задач, где протекание процессов зависит лишь от двух координат. Одна координатная ось отводится действительной составляющей комплексных чисел, вторая - мнимой.



Но если задача существенно трехмерна (например, движение "руки" робота в пространстве), то использование трех чисел различной природы оказалось бы очень кстати. А если продолжить "конструирование" новых единиц, то они пригодятся для решения все более сложных задач...



Не пора ли задуматься над созданием компьютеров, работающих с такими числами?

В.А. Бунин, Е.П.Павлова, П.А.Флоренский

СВЕРХМНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ*

(расширение области двухмерных образов в геометрии до трехмерных и многомерных на опыте нового истолкования сверхмнимостей)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Игумен Андроник (А.С.Трубачев)

Глубокий интерес в разных странах к идеям П.А.Флоренского и, соответственно, большой интерес к изданию его работ (зачастую появляющихся впервые) делают актуальным переход к следующему этапу работы с его наследием: попыткам дальнейшего развития идей П.А., особенно актуальных для современности. Именно попытку такого рода (в основном применительно к физико-математическим проблемам) представляет предлагаемая работа, в состав авторов которой безусловно заслуженно включен сам П.А., без многих задумок которого, зачастую ставших известными только недавно, эта работа не появилась бы. Хочется подчеркнуть, что труд П.А. «Мнимости в геометрии» весьма удачно выбран в качестве носителя ряда идей, заслуживающих первоочередного внимания и развития по следующим причинам:

Как теперь хорошо известно, именно эта книга оказалась последней каплей, переполнившей чашу терпения ненавистников П.А., и было бы символом научной реабилитации П.А. увидеть новую актуальную для современности научную поросль на ниве его книги;

Книга П.А. не относилась к числу «легких», если учесть тот факт, что рассматриваемое в ней понятие - «мнимое число» - с момента его открытия Дж.Кардано в 1545 году и почти до настоящего времени не получило практически никакого разумного дальнейшего развития, несмотря на общеизвестную актуальность мнимых чисел для науки и техники;

* Машинописный текст

Наконец, как в исходной книге П.А., так и предлагаемой в качестве ее развития (преимущественно в области физико-математических проблем) имеются вполне конкретные и актуальные примеры приложений в электротехнике, механике и др., что также 'подчеркивает актуальность данной работы.

К числу естественных недостатков, а скорее - неполноты, делающей актуальными последующие, иные работы, я бы отнес то, что авторы, в основном, ограничились разработкой физико-математической проблематики, не затрагивая богословскую. Но не всем быть такими энциклопедистами, как П.А., поэтому я позволю себе краткое замечание для будущих разработчиков теологической части идей П.А., чтобы стало понятно, почему П.А. стремился совместить, казалось бы, несовместимое: теодицею (квинтэссенцию учения о Боге) и антроподицею. Дело в том, что П.А. всячески старался преодолеть главное противоречие: как человеку, существу, казалось бы, конечному, «зажатому» со всех сторон бесконечностями Пространства и Времени, удается хоть что-нибудь постичь об окружающем? П.А. считал, как неопифагореец, следуя Паскалю и Гермесу, дело постижения мироздания не безнадежным, так как хотя человек «вовне» и ограничен, но он безграничен «вовнутрь», в свой «микрокосм», который в известном смысле соизмерим, гармоничен с внешними бесконечностями.

Кстати, проблема соизмеримости бесконечностей, которой занимался Г.Кантор, волновала и П.А., так что можно было бы пожелать авторам, которые так же работали над этой проблемой, посвятить ей отдельный труд.

В работе найдут для себя много нового как математики (от любителей до элиты), так и широкий круг читателей, кроме тех, кого «современное» образование уже успело лишить образного мышления, то есть работоспособности правого полушария мозга.

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы - по возможности продолжить и расширить отдельные мысли, заложенные в уникальной работе П.А.Флоренского «Мнимости в геометрии» [1], человека не-обычной судьбы и оригинальных холистичеки-пифагорейских взглядов, актуальность их начинает осознаваться только сейчас, когда человечеству, как виду, грозит гибель, если оно в течение 30 - 50 лет не найдет в гармонии с природой выхода из экологического, технократического, межконфессионального и иных тупиков [2], в которые его завело качество «работы» управленцев всех мастей и конфессий: ученых, политиков, религиозных деятелей и представителей иных «кланов» управленцев. Основная черта жизни и творчество П.А.Флоренского, проявлявшаяся и в развиваемой работе [1] «является нам как гармонически-прекрасное целое» [3, с.503].

Чтобы человечество под неизменно «мудрым» водительством разных управленцев не погибло и его ценности «не распались на самостоятельные и не связанные друг с другом, надо найти для них единую систему координат, общую характеристику. Такой характеристикой их для отца Павла Флоренского является противоречие» [3, с.487]. В этом смысле П.А.Флоренский, продолжая труды Гераклита, Пифагора и других древних вполне заслуживает, по нашему мнению, имени НЕОПИФАГОРЕЙЦА. Хотя главной целью настоящей работы, как и работы [1], является, казалось бы, весьма частный случай объединения в гармоничное целое геометрии и алгебры путем разрешения существующего между ними противоречия (неадекватности для 3-х и более измерений), этот частный случай сразу же находит отображение в иных, например, физических проблемах, где так же противоречия снимаются введением понятия о гармоничном целом (см. раздел 7). И по мнению В.Е Федорова «Флоренский объективно является продолжателем пифагорейско-платоновской традиции в математике» [3, с.744]. Предельно сжатый обзор истории «управленцев человечества», как «пастырей стад человеческих», показывает, что изначально единая система религиозно-научного управления в первобытном обществе (вождь + шаман) сохранялась и у Египтян (фараон + жрец), и даже у Пифагорейцев, олицетворявших и науку и религию, как «знаниекратию» - рычаги управления государством [2], и только в 325 году благодаря запрету римского императора Константина [2] на деятельность пифагорейцев произошел окончательный раскол между религиозным и научным кланами управленцев. При этом науке досталось только решение «примитивных» задач, допускающих использование математического инструментария, а религия занялась самыми трудными, но, к сожалению, лишенными такого инструментария проблемами - морали, веры и т.д. Разумеется, усилия П.А.Флоренского по восстановлению пифагорейской цельности «управления» были преждевременны и потому не нашли поддержки, хотя «математические разработки Флоренского подчинены идее сочетания научных данных и религиозных представлений, а осуществимость подобного сочетания воспринимается как возможность создания «религиозной науки и научной религии» с включение в концепцию всеединства» [3, с.743].

Методологически изложение ведется нами «от простого к сложному». После краткого описания предыстории проблемы «образность-безобразность» последовательно описывается решение этой проблемы для 1-мерных, 2-мерных, 3-мерных и многомерных систем. Результаты иллюстрируются физическими примерами и Приложениями, а также освещены в ряде других работ, частично указанных в [4], [5] и др.

Перспективные прикладные аспекты проблемы сверхмнимостей в геометрии, а также дополнительную библиографию, можно найти в Приложении II (которое не только из-за технических целей, например, уменьшения объема текста, но и для удобства разработчиков поставленных там проблем, быть может, целесообразно издавать отдельно, в несвязанные сроки).

2. Краткая предыстория проблемы единства (гармонии, равноценности, адэк- ватности) образного и безобразного мышления

Первоначально у человека, несомненно, преобладало образное мышление, что подтверждается, например, наскальными рисунками, хотя уже в них можно усмотреть зародыши абстракций в виде символических, сакральных знаков, не приведенных в систему. Огромным шагом в направлении абстрактизации явились речь, а затем и письменность. Но, к сожалению, на этом пути абстрактизации практически невозможно было говорить об адекватности абстрактной и реальной (или хотя бы образной) систем. Это видно хотя бы из того, что слово «дом» звучит по-разному в разных языках, т.к. не содержит практически ничего отображающего образ дома. В этом смысле только иероглифическое письмо сохраняет зачатки такой адекватности. Потерпев полный крах в создании адекватных абстракций для физики и т.п., люди постепенно сосредоточили усилия на поисках абстрактного (цифрового - арифметического, а затем и буквенного - алгебраического) описания хоть какой-нибудь примитивной реальности, а именно - геометрической реальности, которую вполне можно рассматривать как физическую реальность с удаленными всеми характеристиками, кроме длины. Кстати, заметим, что еще Аристотель, разбирая вопрос о минимальном числе начал, после колебаний между тремя и четырьмя пришел к выводу: их всего три. На этом же уровне и современная физика. У нее три начала: M (масса), L (длина), T (время). Правда, в наименее разработанном разделе (учение об электричестве, где у Максвелла было три начала) «скатились» до четырех. А вот, скажем, у древних Китайцев дело обстояло еще хуже, чем у электриков: у них было семь начал, что описано в «Книге перемен». Ну как тут не вспомнить слова Чехова: «Пишу длинно, так как не имел времени сочинить короткое письмо».

Несомненно гениальным предвидением следует считать вполне совпадающее с утверждениями физики о трех началах учение религии о Троице, как числе начал.

Итак, оставив проблему создания адекватных абстракций для всей реальности, ученые сосредоточились на достижении адекватности с наипростейшей реальностью - ГЕОМЕТРИЕЙ. Вначале без особого труда была введена абстрактная символика для одномерной длины L в виде цифры или буквы. Затем, трудами Декарта и других [1] была создана аналитическая геометрия, в которой на комплексной плоскости, т.е. для двух измерений была найдена полная адекватность между геометрическим положением точки (вектора в плоскости) и ее аналитическим описанием. К сожалению, на двух измерениях и оборвалось установление адекватности между геометрией и алгеброй. Ограничив этим исторический обзор, перейдем к более подробному рассмотрению последовательных этапов установления адекватность для объектов разной размерности, начав со сравнительно хорошо известных 1-мерных и 2-мерных случаев.

3. Адекватность геометрических и алгебраических представлений одномерных систем

Уже в давние века возникло естественное стремление обозначать длину 1-мерного объекта (отрезка прямой) цифрой или буквой. Начало отрезка принималось за нулевую точку.

И если положительные величины соответствовали точкам на правой полуоси, то столь же естественным было откладывание отрицательных значений на левую полуось. При таком подходе никаких «неадэкватностей» не возникало: сложению и вычитанию отрезков соответствовали сложение и вычитание соответствующих им цифр или букв.

Об умножении здесь серьезно говорить не приходилось, так как такая 1 -мерная геометрия соответствовала математическим действиям всего лишь первой ступени: прямому - сложению, и обратному - вычитанию. Другие проблемы при этом также успешно игнорировались. Например, мало кого волновала «континуум - проблема»: можно ли точками так густо «закрасить» линию, что иные точки не поместятся? Или проблема безразличия к повороту оси вокруг своей осевой линии, или проблема ненулевой толщины оси, волновавшая еще Н.Морозова [6].

Столь же мало волновал исследователей 1-мерных систем и тот факт, что начало вектора «висело в воздухе», так что смещение вектора, как некая следующая степень свободы (1- я степень свободы - длина вектора), не несла никакой нагрузки и никому даже в голову не приходило, что один и тот же вектор принципиально может нести информацию не только об одной величине (точке его конца), но и о столь же независимой второй. Более того, вполне возможна, казалось бы, и фиксация информации о 3-ей и последующих независимых величинах: расстоянии до точки начала вектора, расстоянии до точки, от которой отмеряют начало, определяющее точку начала вектора и т.д. до бесконечности. Однако, такая «загрузка» информацией о нескольких независимых величинах для 1-мерного объекта была практически неосуществима по следующей простой причине. Все эти величины являлись числами одной и той же природы: действительными числами. Поэтому, будучи, скажем, сложены, они теряли раздельную информацию. Вот пример. Если 5+7=12, то, зная результат (12), уже нельзя восстановить, найти из чего 12 получено (из 5+7 или 6+6 и т.п.). И только появление чисел новой природы (мнимых) открывало возможность «однолинейного» представления нескольких независимых переменных [4], однако эта возможность не была реализована математиками в одномерном случае.

4. «Мнимости в геометрии» как завершающий этап в достижении адекватности 2-мерных систем.

В соответствии с т. н. "Принципом перманентности" Ганкеля математические действия более высоких ступеней единообразно образуются из предыдущих. Так, если многократно повторенное прямое действие 1-й ступени (сложение) приводит к прямому действию следующей 2-й ступени - умножению, например

2+2+…..+2=2n,

n слагаемых, то совершенно подобным же образом, т.е. генетически, по принципу перманентности п- кратное повторение прямого действия 2-й ступени (умножения) приводит к прямому действию 3-й ступени (степени):

2*2*…..*2=2n

Цепочка этих обобщений бесконечна.

Но геометрическая основа, абстракцией которой является арифметика и алгебра, также, как выяснилось, развивается генетически. Именно на основе работ Декарта и Д. Кардано (открывшего мнимые числа), а также более поздних (Аргана, Гаусса и др. [4]) было выяснено, что помимо "горизонтальной" (=действительной) оси существует независимая от нее "вертикальная" (=мнимая), и Гауссом был даже предложен термин "боковая" ось для неоткрытой еще в его пору третьей - "сверхмнимой" оси.

Но о третьей оси речь пойдет в следующем разделе, а пока что констатируем тот хорошо известный факт, что 2-мерные геометрические системы в виде комплексной плоскости вполне адекватны арифметике или алгебре комплексных чисел. Именно с этими 2-мерными объектами работал Флоренский [1], весьма наглядно прояснив, что мнимость линейных сторон, скажем, плоского квадрата вполне логично обуславливается отрицательностью этой площади. Упрощенно говоря, можно так определить физический смысл «мнимого отрезка»: «величина мнимого отрезка - размер стороны отрицательного (= «задолженного») квадрата». Соответственно, если квадрат положительный, то и стороны у него действительные. На этом, казалось бы, и исчерпывается проблема адекватности 2-мерных систем. Но Флоренский совершил невозможное и пошел дальше. Не имея никаких чисел иной природы, кроме действительных и мнимых, он сумел описать фактически весьма оригинальный частный случай 5- мерного (?!) объекта в виде сдвоенной - "двусторонней" поверхности. Подробнее проблема наглядных адекватных многомерных изображений будет рассмотрена в разделе 6, однако здесь мы дадим предварительное пояснение.

Отвлекаясь для простоты от непринципиальных усложнений (рассмотрения криволинейных поверхностей вместо плоских, дифференциальной геометрии и криволинейных координат вместо обычной геометрии Декартовых координат и т.п.), рассмотрим сдвоенную (=двухстороннюю) плоскость Флоренского так. В обычной Декартовой плоскости с осями ilxl i2x2 отложена третья ось i3x3. На этой третьей оси из близкой к началу координат точки i3x3 построена вторая Декартова плоскость с координатами i4x4 i5x5. Здесь il, i2,… i5 - единичные орты соответствующих координат, являющиеся в общем случае числами разной природы. Это и есть общий случай 5-мерных Декартовых координат (см. также раздел 6). Теперь получим из этих общих 5-мерных координат в качестве частного случая 5-мерную систему, изобретенную Флоренским. Примем, что два первые орта - обычные действительные единицы, два последние - мнимые, а средний отрезок оси - бесконечно малая величина, т.е. стремится к нулю:

$$I1 = i2 = 1; i3x3 \to 0; i4 = i5 = \sqrt{-1}\,.$$

Легко видеть, что это и есть 5-мерная система координат, которую удалось построить Флоренскому при полном отсутствии в современной ему математике чисел иной природы, чем мнимые и действительные, т.е. используя всего лишь 2-мерные средства. Остается только изумляться и этому, и найденной Флоренским связи этих координат с конкретными физическими явлениями [1].

Двигаясь дальше, перейдем от 2-мерных к 3-мерным системам.

5. Адекватность 3-мерной геометрии и алгебры

Казалось бы, после утверждения в науке полной адекватности геометрии комплексной плоскости и алгебры комплексных чисел (и даже более того: успешного экскурса Флоренского в 5-мерные системы) оставалось сделать небольшое усилие для генетического достижения подобной же полной адекватности в 3-мерном случае. Но... все оказалось сложнее. Для краткости обрисуем ситуацию словами двух известных математиков. "'Математики ожидали, что распространение понятий о комплексных числах с 2-х на 3-мерные объекты окажется "детской игрой", однако огромные усилия были потрачены безрезультатно, так как такое распространение не удавалось без утери правил обычной алгебры" [7]. И эта трудность перехода от 2-х к 3-мерным объектам отнюдь не случайна. Она есть частный случай подробно исследованной Флоренским [8] проблемы: а не теряется ли, вопреки мнению Г. Кантора, часть информации при отображении объекта более высокой размерности на объект более низкой размерности? "Возможно ли четырехмерный или, скажем для простоты, трехмерный образ отобразить на двухмерном протяжении, хватит ли в последнем точек?" [9, с.81].

Флоренский дает предельно наглядное и простое объяснение утери информации: скажем, 3-мерная оболочка яйца, будучи растолчена, может уместиться и на 2-мерной плоскости, но при этом будет утеряна информация о ее форме [8]. Подобным же образом утеря информации об угловом положении “толстой” оси x2 (см. Приложение I), т.е. утеря фазового множителя в свое время не позволила Гамильтону полноценно спроектировать 3-мерный образ Декартовых координат на “однострочную” - одномерную алгебраическую запись. Устранение этого пробела позволило (см. Приложение I) ввести для 3-мерных сверхкомплексных чисел (в полной аналогии с обычными, 2-мерными комплексными числами) принципиально несложные преобразования: экспоненциальную форму для умножения и деления и запись в проекциях для действий первой ступени. Основы такой записи даны в Приложении, а детали мы не приводим, чтобы не загромождать изложение. Кстати, настоящая работа совершенно лишена рисунков не столько ради краткости, сколько из-за принципиально нового качества используемой нами математики: полной адекватности геометрического и алгебраического хода рассуждений. Любой читатель, которого “современное” преподавание математики не лишило окончательно образного мышления, легко увидит за каждой нашей алгебраической выкладкой четкую геометрию, однако, разумеется, делать это нужно не во второстепенных частях выводов, а, скажем, в начале и в конце. Следует, вопреки навязываемому преподаванием мнению, подчеркнуть: роль абстракции от геометрии, т.е. роль алгебры - второстепенна. Алгебраист подобен грузчику: быстро и ловко перетаскивая огромные “грузы” - буквы, он не ведает, что в этих ящиках. Алгебра - слуга, грузчик геометрии. Алгебраическое знание второсортно по сравнению с геометрическим, и не зря математиков раньше именовали именно геометрами. "Современная" педагогика, прививая обратную оценку, ставит “телегу поперед лошади”.

У человека с хорошим образным мышлением большинство современных математических работ, написанных неадекватно, оторванно от геометрии, ничего кроме отвращения не может вызывать. Но это (ситуация в 3-мерном случае) - только “цветочки”. “Ягодки” появляются при переходе к многомерным проблемам, чем мы и займемся.

6. Адекватность наглядной многомерной геометрии и алгебры

Нет в математике, да пожалуй и в любом другом разделе научного и ненаучного знания, проблемы более запутанной, чем проблема наглядной многомерности. Известны даже трагедии, связанные с этой проблемой [9], когда, например, один известный ученый, вообразивший, что он решил эту проблему, скончался от волнения. Однако существуют догадки творца аналитической геометрии Р. Декарта о полной генетичности любого числа измерений. Так, в одной из своих лучших работ, поначалу предназначавшейся не для печати, а в качестве “памятки на старость”, он писал: “...измерениями тела являются не только длина, ширина и глубина, но также и ...бесчисленные измерения ...в одном и том же предмете может быть бесконечное количество различных измерений .. .все они равноценны ...

Рассмотрение этого проливает яркий свет на геометрию, ибо большинство людей ошибочно представляют в этой науке три рода величин: линию, поверхность и тело” [10].

Сделать многомерную геометрию адекватной алгебре и столь же наглядной, как двух- и трехмерная геометрия, позволяет единой, генетический подход к проблеме. При таком подходе цепочка геометрических рассуждений, соответствующая переходам ко все более высоким размерностям, выглядит следующим образом. Если 1-мерный объект (скажем, Декартова ось) это эквивалентный совокупности точек след от переноса точки, то 2-мерный объект (Декартова плоскость) - подобным же образом (т.е. переносам) получается как “след” переноса объекта предыдущей, 1-й размерности (линии). Совершенно по этой же системе 3-мерный объект (объем) возникает переносом 2-мерного (плоскости), 4-мерный объект (“толстая линия”) - переносом 3-мерного (объема), 5-мерный (“толстая плоскость”) - переносом 4- мерного и т.д. до бесконечности. Разумеется, по мере роста размерностей возникают (в полном соответствии с правилами обычной комбинаторики) все новые возможности (подобно возникновению все новых изомеров в химии по мере усложнения молекул). Так, можно строить n-мерные объекты (как бы следуя известному девизу Наутилуса: "Подвижное в подвижном") в виде цепочки 3-мерных реперов, определяя координаты начала каждого звена в предыдущем звене, а можно (скажем для упрощения вывода результатов на экран современного, к сожалению, всего лишь 2-мерного дисплея) пользоваться цепочкой 2-мерных реперов.

Возможно использование и иных цепочек - “кластеров”, в т.ч. и многомерных. Но все эти гигантские возможности абсолютно не осуществимы на практике, если не иметь столько видов новых чисел il, i2..., сколько требуется осей: уже упоминалось, что при использовании на всех осях чисел одной и той же природы, точке в n-мерной цепочке будет соответствовать не п независимых координат, а гораздо меньше, ибо, скажем, сумма двух чисел одной природы теряет раздельную информацию о слагаемых как, впрочем и умножение и любые иные действия, что исключает, например, осуществление конформных отображений плоскости в двух действительных осях. А при использовании для всех осей чисел разной, несмешиваемой природе, результаты любых математических операций вновь могут быть разложены по осям в соответствии с природой чисел (как это делается при 2-мерных конформных отображениях). Изложенный подход обеспечивает полную адекватность геометрического и алгебраического методов, что подтвердилось на большом количестве конкретных примеров.

Так, в [11] был представлен целый “математический натюрморт” из новых, неизвестных современной математике координат: изогнутый профиль Жуковского ("Крыль"), свернутый в вольмерку тор (“частица”, аналогичная предложенной еще Максвеллом частице в виде тора, свернутого в трилистник); деформированная сфера (“груша”) изогнутый элипсоид вращения (“огурец”) и др. Аналогичным путем выведены формулы для объемной логарифмической спирали (“улитка” с “золотым сечением”) и др. [12], [13], многогранников [14] и др. Подчеркнем, что именно многогранники, особенно Платоновы, полученные с помощью сверхмнимых чисел, нагляднее всего иллюстрируют Пифагорейскую роль сверхмнимых чисел в геометрии. Так, если (как это хорошо известно) корень n-й степени из единицы на комплексной плоскости геометрически соответствует правильному n-угольнику, то в 3-мерном случае корень n-й степени из соответствующей единицы в сверхкомплексном объеме соответствует (в полном согласии с генетическим, системным подходом) правильным геометрическим многогранникам: октаэдру $\sqrt[4]{1}$, кубу $\sqrt[4]{-1}$, тетраэдру $\sqrt[3]{i_2}$ и т.д. [4]. Поддаются адекватному восприятию и объекты более высокой размерности: поликристаллы, квазакристаллы [4], [14] и др., например, при таком подходе легко описывается “рука робота”, как 9-мерный манипулятор, “кубик Рубика”, как 81-мерный объект и т.д. [15], [16] и др.

7. Прикладные аспекты проблемы сверхмнимостей в геометрии

7.1. Вводные замечания

Как уже отмечалось, авторы считают своей основной задачей посильное продолжение и развитие идей, заложенных в [1] в части прежде всего физико-математической, не затрагивая, скажем, теологических аспектов, что вполне может быть предметом отдельного исследования. Однако холистически-пифагорейский дух автора [1] побуждает нас изложить физико-математические и другие приложения проблемы сверхмнимых чисел с привлечением незначительных философско-холистически-пифагорейских акцентов в ниже рассмотренных конкретных примерах приложений. Снабдить нашу работу приложениями прикладных аспектов побуждает нас и наличие прикладных примеров в [1] и то оправданное мнение, что "Сегодня мы можем с полной уверенностью сказать, что “Мнимости в геометрии” вместе с другими логическо-математическими и лингвистическими исследованиями Флоренского концентрируют вокруг себя множество проблем, дают ключи к их решению" [1, с.5].

7.2. Сверхмнимости в геометрии как ключ к устранению

собственных трудностей математики

Большинство собственных трудностей математики, которые поддаются устранению использованием сверхмнимостей в геометрии, затрагивалось нами выше и в ряде публикаций [4], [6], Приложениях I, II и др. Поэтому ограничимся напоминанием только о нескольких из устраненных трудностей:

Применение сверхмнимостей в геометрии позволило устранить скудость запаса координат, найти множество новых для геометрии пространственных координат, необходимых для решения задач электротехники, механики и др. [11], [13], [16], [17], [18], [19] и др.;

Устранена ненаглядность многомерных понятий, что имеет педагогическое, научное и общепознавательное значение;

Устранена неадэкватность геометрии и алгебры для 3-х и более измерений, что важно и для прикладных проблем, и для науки;

Найден способ аналитического выражения Платоновых тел и иных многогранников, о чем мечтал еще Е.С.Федоров [4], [14] и др.;

Восстановлена справедливость принципа перманентности Ганкеля, утверждавшего генетичность развития математических действий и понятий;

Устранена “нематематичность” математической символики [4] и др.;

Найдена причина, по которой математические достижения во всем мире не признаются изобретениями или научными открытиями, и подсказано, как выправить ситуацию (исключить из “собственно математики” полулингвистические примеси школ Гамильтона, Кантора и "Бурбакизация математики" [21]) [4], Приложения I, II и др.

7.3. Сверхмнимости в геометрии как важная часть математического аппарата гармонизации и самогармонизации электрических, механических и др. физических, биологических и иных объектов

Проблема гармонизации достаточно полно освещена в [4]. [21] и другой литературе, приведенной нами. Проблема же самогармонизации много сложнее. Она слегка освещена в открытой публикации [21], а подробнее, как технология 21-го века, подобная технологии, по которой происходит формогенез в живых организмах, она затронута в нескольких не подлежащих открытой публикации изобретениях.

7.4. Сверхмнимости в геометрии как средство обобщения «Теории Информации» до«Теории Энергоинформации»

Существующая теория информации имеет общеизвестный огромный недостаток: неспособность учитывать ценность информации. Так, нажатие или ненажатие (да - нет) кнопки звонка к соседу по существующей теории информации содержит ровно столько же “информации” (“один бит”), сколько нажатие или ненажатие “ядерной” кнопки незадачливым президентом какой-нибудь ядерной державы. Анализ показывает многомиллиарднократную разницу в “ценности” этих двух “нажатий” [23]. Расчет основывается же использовании “Уравнения энергоинформации”, важную роль в котором играет выражение компонент с применением сверхмнимых чисел [22].

7.5. О дальнейших прикладных аспектах проблемы сверхмнимостей в геометрии

Флоренский понимал, что рассматриваемая им проблема мнимостей в геометрии открывает простор для дальнейших исследований и поэтому “...ради закругленности теории мнимостей представляется полезным наметить ходы дальнейшей разработки и некоторые возможные применения” [1, с.44]. Подобная же ситуация складывается и в проблеме сверхмнимостей в геометрии. Поэтому, отсылая читателя к большому перечню новых проблем (“Физико-математические проблемы для III тысячелетия»- см. Приложение II), ограничимся только выражением сожаления, что П.А. не удалось самому осуществлять решение этих проблем и намеченных им проблем, таких, как поднятые Г.Кантором.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение авторы выражают глубокую признательность

близким П.А. Флоренского и его семье за теплое отношение, возможность ознакомления с наследием П.А. и помощь в подготовки рукописи.

Очень кратко результаты работы можно выразить так:

Показано, что предложенная П.А. геометрическая форма мнимостей в геометрии находит совершенно естественное место в более общей “геометрии сверхмнимостей” в качестве уникального случая, когда средствами 2-мерной геометрии удается построить фактически 5-мерный образ в многомерном пространстве (две оси на действительной полуплоскости, две - на мнимой и одна - как расстояние между полуплоскостями.

По аналогии с [1] изложены особенности и широкие практические применения понятия о сверхмнимостях в геометрии.

В тексте и Приложении II намечены перспективы дальнейших применений.

Изложение ограничивается математическими и пифагорейскими аспектами проблемы, не затрагивая теологических, которые требуют отдельного исследования

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоренский П.А. Мнимости в геометрии.' Расширение области двумерных образов геометрии (опыт нового истолкования мнимостей). Москва, «Лазурь», 1991, 96 с.
2. Бунин В.А., Павлова Е.П. и др. Наследие Вернадского - Флоренского о системной гармонизации НОО-, Техно-, Социо - и иных сфер - основа глобальной концепции выживания. Доклады Международной конференции «Научное наследие В.И.Вернадского в контексте глобальных проблем цивилизации». Москва, Издательский дом «Ноосфера», 2001, с. 342-344.
3. П.А.Флоренский: pro et contra Сост., вступ.ст., примеч. и библиогр. К.Т.Исупова. - Спб.: РХГИ, 2001.-824 с.
4. Бунин В.А. Математика и трудности физики. Сознание и физическая реальность, Том 2, №2, 1997, с.71-79.
5. Бунин В.А., Рыжков Л.Н. К проблеме оценки безопасности энергоинформационных воздействий. Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. Вып. 3., 2001, Москва, с. 118-127.
6. Бунин В.А., Павлова Е.П. Три тупика современной математики. Центр и Музей изучения, охраны и реставрации наследия священника Павла Флоренского. Материалы сообщения 22 января 2001г., Москва, с.9. (даны

в виде Приложения I).
7. Moon P., Spenser D.N. Theory of holors, Cambridge, 1986, p.l 1.
8. Флоренский П.А. Сочинения в четырех томах. Том 3 (1). «Мысль», Москва, 2000.
9. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. T.I, Наука, Москва, 1989, с. 189-192.
10. Декарт Р. Правила для руководства ума. ГСЭИ, Москва - Ленинград, 1936.
11. Balaksin O.B., Bunin V.A., Ignatieff Y.A. «Some examples of threeorthogonal objects of noneuclidean symmetry», in: Abstracts of the Interdisciplinary Symmetry Symp., Budapest, 1989, p. 246-248.
12. Фролов К.В. Вибрационная биомеханика. Наука, Москва, 1989, с.11-18.
13. Bunin V.A. «Propagation peculiarities of vibrations in inhomogeneous and anisotropical medium connected with some problems of biomechanics", in: Man under vibration: Proc. Of the 2-nd Int. CISM-IFTOMM Symp., Moscow, 1985, p.31-35.
14. Бунин В.А. «Е.С. Федоров как математик», тезисы докладов Международной конференции «Пространственные группы симметрии и их современное развитие», Ленинград, 14-18 мая 1991г., АНСССР, Москва, 1991, с.44.
15. Бунин В.А., Бунин В.В. Сверхстепень, сверхкорень...», Наука и жизнь, №10, 1989, с. 140.
16. Balakshin O.B., Bunin V.A., "Multidimensional symmetry and its adequate graphic- analytical representation in the system "man - machine-environment", Symmetry of Structure: Abstracts of the 1st Interdisciplinary Symmetry Symp., Budapest, 1989, p.25-27.
17. Бунин В.А., Чудинов В.А. "Об использовании в задачах прикладной электродинамики чисел новой природы", Труды МОИП. Секция физики, Изд-во МГУ, Москва, 1976, с. 124- 126.
18. Бунин В.А., Чудинов В.А. «Решение задачи максимально широкополосном неоднородном волноводе без отражений с применением чисел новой природы», Труды МОИП, Секция физики, Москва, 1976, с.127-130.
19. Бунин В.А., Борщев Б.И., Егудов С.М. «Звуковод для передачи механических колебаний», А.с. СССР № 122173,21, 11,58 г.
20. Зеленкин А.Н. Ошибка Георга Кантора Вопросы философии № 2, 2000г., с. 45-48 и др.
21. Бунин В.А., Павлова Е.П. Самоорганизация как недарвиновский фактор адаптации природных технологических объектов. Международная конференция «Экологический опыт человечества: прошлое в настоящем и будущем». Тезисы докладов Института Истории Естествознания и техники РАН., Москва, 1995г.
22. Бунин В.А., Рыжков Л.Н. «Физико-математический смысл внесистемной сверхчувствительности - энергоинформационный ключ к проблеме «пиаровской» безопасности. Материалы девятой Международной

конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем». Москва, 2001г., Институт Проблем Управления РАН.
23. ПРИЛОЖЕНИЕ I: «Три тупика современной математики». Центр и Музей изучения охраны и реставрации наследия священника Павла Флоренского. Материалы сообщения 22 января 2001 г.. Москва (Бунин В.А., Павлова Е.П.).
24. ПРИЛОЖЕНИЕ II: «Физико-математические проблемы для III-го тысячелетия». Центр и Музей изучения охраны и реставрации наследия священника Павла Флоренского. Материалы сообщения 22 января 2001 г. Москва (Бунин В.А.).

В. А. Бунин, Е. П. Павлова

ТРИ ТУПИКА СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ*

В философской литературе почти общепринято, и не без некоторых оснований мнение, что математика является «царицей и светочем науки». Еще со времен Леонардо да Винчи бытует утверждение, что в каждом деле столько науки, сколько в нем математики. И если это хотя бы отчасти так, то тем большего философско-критического внимания требует рассмотрение недостатков, а тем более тупиковых ситуаций собственно математики, которые обязательно отобразятся на состоянии математизируемых разделов науки. Настоящее сообщение касается только трех, но зато важнейших и взаимосвязанных из десятка ранее отмеченных [1] трудностей математики. Помимо актуальности проблемы авторов оправдывает также известная философско-житейская мудрость, утверждающая, что «даже на Солнце бывают пятна», и более того, зачастую «нет места темнее, чем под светильником».

1. НЕПАТЕНТОСПОСОБНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОСТИЖЕНИЙ

Вопреки философскому положению о реальности, а не надуманности математических объектов, как моделей реальной Природы, сложилась на первый взгляд удивительная ситуация. Ни в одной стране математические достижения не признаются ни изобретениями, ни научными открытиями, сколько бы ни вводили нас в заблуждение названия, вообще говоря, прекрасных книг типа «Изобретения в математике» Ж. Адамара или «Математическое открытие» Д. Пойа. Авторы, издавна и не понаслышке сталкиваясь с проблемами изобретений и открытий, знают об узаконенном существовании «запретных перечней», отвергающих возможность правовой защиты примерно так: «Не признаются изобретениями или открытиями

* Машинописный текст

устройства для грабежа, для казни преступников, игры, символы, значки, математические достижения...» Каковы же методологические и философские корни столь сурового отношения к математике? - Не трудно видеть, что они вполне правомерны: в основе непатентоспособности перечисленных и некоторых иных объектов лежат весьма общие принципы, одним из которых является «принцип отсечения дурных бесконечностей», под действие которого очевидным образом подходят неограниченные количественно игры, символы и т.п. К сожалению, современная математика вполне закономерно попадает в этот тупик непатентоспособности, так как нарушила один из основополагающих философско-математических принципов, провозглашенных в 1886 г. на математическом съезде в Берлине Кронекером: основой для математики (да и всего остального, если стоять на позициях учения Пифагора о роли натурального ряда чисел во «всеобщей гармонии») являются числа. Поэтому Кронекер сказал: «Целые числа сотворил господь Бог (как адекватное отражение Природы - авт.), а прочее - дело людских рук» *121.* С одной стороны, современная математика, отойдя от «Принципа перманентности Ганкеля», утверждавшего единообразие в построениях математики, и поддавшись утверждению т.н. «школы Бурбаки» о «свободе в создании системы постулатов» для каждого математика, приобрела именно качество «дурной бесконечности». Каждый математик получил право создать «свою, карманную» математику при условии соблюдения одной лишь «внутренней непротиворечивости», но без соблюдения требования непротиворечивости «внешней», т.е. по отношению к Природе, к правилам натурального ряда, отражающего Природу. С другой стороны, допустив в математику чисто «лингвистические», т.е. не порожденные натуральным рядом символы (впервые это сделал Гамильтон в его кватернионах), математика еще раз нарушила недопустимость «дурной бесконечности», ибо «лингвистических» значков может быть неограниченно много, причем даже разных для названия одного объекта. Как будет видно ниже, именно последнее (применение не математических, а «лингвистических» символов) породило, и два следующих тупика.

2. НЕМАТЕМАТИЧНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИМВОЛИКИ

Кажется удивительным, что представители современной математики, готовые, особенно в последние десятилетия, смело взяться за математизацию любого, даже гуманитарного раздела науки, совершенно не замечают полной нематематичности, архаичности и бесперспективности собственной символики. Упомянутый принцип перманентности Ганкеля, будучи применен к построению символики, казалось бы, легко открывал путь к математизации самого понятия «математическое действие» и, соответственно, к математизации, т.е. к выражению числами, математических действий 1-й ступени, 2-й ступени и т.п. Однако, это не было ни замечено, ни развито. Дело не в «неэстетичности» существующей символики, хотя и это неприятно: скажем, термин «корень» не вызывает никаких стимулирующих перманентное развитие ассоциаций кроме бесполезно-«корнеплодных». Дело прежде всего в том, что математизация понятия «математическое действие» сразу же открывает перспективы развития. Ограничимся простейшим поясняющим примером [1]. Скажем, введем для обозначения прямого действия второй ступени - умножения - цифру два, обратного -минус два, подчеркнув цифру, обозначающую действие. Тогда произведение пяти на шесть запишется так: 5 $\underline{2}$ 6. Используя для обозначения действий широкий арсенал чисел, получающихся обобщением натурального ряда (отрицательные, дробные, мнимые и т.д.), легко получим не только совершенно новые, «промежуточные» ступени действий, но и возможность создать своеобразное «исчисление действий», где искомым может являться само действие. Ввиду полной неразработанности данного направления, на котором «еще и конь математический не валялся», ограничимся сказанным и только напомним чересчур смело берущимся за математизацию чего угодно (а особенно т.н. «сверхбольших систем» -экологии, экономики, безопасности и т.п.) слова, кажется, Гиппократа: «Врач, исцелися сначала сам!». Всерьез браться за математизацию столь огромных, заведомо многомерных систем можно не ранее, чем осилив адекватность геометрии и алгебры для любого числа измерений, но на этом пути еще один, третий тупик, к краткому рассмотрению которого и переходим.

3. НЕАДЕКВАТНОСТЬ ГЕОМЕТРИИ И АЛГЕБРЫ

Нет в современной математике, физике, философии (других «инфицированных» математикой областях человеческой деятельности) другой проблемы, столь же заведенной в тупик, как проблема «наглядной многомерности». Нерешенность этой проблемы породила и продолжает порождать массу недоразумений и даже трагедий: от появления т.н. «контактёров», получающих «сигналы» напрямую «оттуда» (из высших измерений), до таинственного перемещения корабля между портами (по «просочившимся» сведениям, чуть ли не с личным участием Теслы и Эйнштейна) и даже до действительной трагедии, связанной с гибелью известного человека и описанной более чем надежным и трезвым автором - Ф. Клейном [3].

С другой стороны, нерешенность этой проблемы, вполне естественно, породила огромное стремление со стороны прежде всего самих математиков понадежнее прикрыть эту явную прореху соответствующим «фиговым листиком» (и даже лучше несколькими). Именно так, в известной мере с целью маскировки данного тупика, можно расценить титанический труд математиков по созданию целых новых разделов математики с явно маскирующими прореху названиями. Например, чего стоит одно только название вполне современного раздела математики: «Алгебраическая геометрия». Ведь в ней в слово «геометрия» не вложено абсолютно никакого геометрического (в нормальном, общечеловеческом, школьном, правополушарном значении) смысла. Столь же далек от нормальной геометрии еще один, тоже вполне «современный» раздел: «Линейная алгебра», нацеленный прежде всего на создание впечатления, что с проблемой многомерности все обстоит терпимо. Попробуем, отбросив вполне оправданные эмоции, рассмотреть суть тупика многомерности и наметить ретроспективу и перспективу периодизации истории этой проблемы.

Первый период истории этой проблемы занимает первые два тысячелетия нашей эры: начиная с работ Пифагора и кончая работами Декарта. В это время никаких сомнений в адекватности (равносильности) геометрических и алгебраических методов исследования не возникало, хотя практические нужды обычно ограничивались 2-мерными проблемами, где, действительно, такая адекватность легко достижима. Она была, в конце концов, обеспечена в теории конформных отображений - весьма эффективном способе получения практически любых 2-мерных координат, совершенно адекватных алгебраическому подходу благодаря тому, что каждому комплексному числу соответствовала своя точка на комплексной плоскости. Сам Декарт, впервые надежно связавший геометрию с алгеброй, хотя и не занимался не актуальной в его время проблемой «визуализации» многомерных понятий, судя по его отдельным высказываниям, считал, что его метод связи геометрии с алгеброй не имеет никаких принципиальных ограничений для единообразного, генетического охвата им проблем все более высокой размерности. Так в одной из своих лучших работ (поначалу созданной не для публикации, а как «памятка на старость») он писал: «... измерениями тела являются не длина, ширина и глубина, но и... бесчисленные измерения... в одном и том же предмете может быть бесконечное количество разных измерений ...все они равноценны... Рассмотрение этого проливает яркий свет на геометрию, ибо большинство людей представляет в этой науке, только три ряда величин: линию, поверхность, и тело» [4]. Но эти надежды Декарта на построение нормальной, «человеческой», наглядной многомерности ждали суровые испытания, которые лучше всего выразить словами пары известных математиков, занимавшихся этой проблемой: «Математики ожидали, что распространение понятия о комплексном числе с 2- на 3-мерные объекты окажется «детской игрой», однако огромные усилия были потрачены безрезультатно, т.к. такое распространение не удавалось без утери правил обычной алгебры» [5].

Второй период связан с работами Карла Фридриха Гаусса (1777-1855) и вкратце состоит в следующем. Гаусс интуитивно чувствовал, что должны существовать числа, отличные и от действительных и от мнимых, занимался их поиском в течении первой половины жизни и даже названия и геометрию для них придумал в системе Декартовых координат: в отличие от «горизонтальных» - действительных, «вертикальных» - мнимых,*'" новые, идущие по третьей оси, можно было бы (если их найти, т.е. суметь выразить через натуральный ряд, как того требовало упомянутое требование Кронекера) назвать «боковыми». Но, не найдя этих новых чисел, Гаусс в течении буквально всей второй половины жизни занимался попытками доказательства того что таких новых чисел вообще «не может существовать никогда». Для такого «доказательства» разрабатывалась т.н. «Основная теорема алгебры», которая, при внимательном рассмотрении [1] оказывается просто не относящейся к делу, так как запрещает «выход из поля комплексных чисел» с использованием весьма слабых степенных функций, т.е. действий всего лишь 3-й ступени, совершенно не являясь поэтому запретом на «выход», основанный на использовании более мощных функций (например, 4-й и последующих ступеней).

Третий, также неудачный, период попыток решения проблемы адекватного представления 3- и многомерности связан с усилиями Вильяма Роуэна Гамильтона (1805- 1865). Как и Гаусс, Гамильтон пару начальных десятилетий своей жизни потратил на поиск новых чисел. Потратил, но... тоже ничего не нашел. И в 1843 году (даже точная дата известна, когда его осенила эта мысль при проходе по мосту) он решил «пойти ДРУГИМ путем", чем Гаусс. Гамильтон не стал, как Гаусс, заниматься «запрещением» новых чисел или изучением «калиток» для выхода из «полей». Он «пошел в обход» трудности, подменив ненайденное выражение новых чисел через натуральный ряд «лингвистическими» символами. Этот прием и по сей день все шире применяют математики, как своеобразную «гибридизацию математики с лингвистикой». Разумеется, подобные «сооружения («кватернионы», «бикватернионы», «диады» и т.д.) неадекватны геометрии и арифметике и фактически представляют собой «псевдоматематически-лингвистический нарост» на собственно математике. К сожалению, в этот перечень входят и «вектора» (частный случай «кватернионов»). В них тоже много нематематических фокусов: нет деления, два умножения и др., хотя они ограниченно полезны.

Наконец, по необходимости очень кратко остановимся на четвертом, современном этапе отыскания новых чисел для адекватности геометрии и алгебры. «Научная цепочка» поиска здесь начинается, пожалуй, с Германа Ганкеля, опубликовавшего свой 1-й том «Теории мнимых чисел» и обещавшего завершить проблему во 2-ом томе, но... скончавшегося. Определенный вклад затем внесли в проблему академик А.П. Котельников (отец почти бессменного Вице-президента АН СССР В.А. Котельникова), принадлежавший к Казанской школе Лобачевского, разработавший на этом пути т.н. «Винтовое исчисление»; его ученик Ф. М. Диментберг, опубликовавший ряд книг по этой проблеме и готовивший двухтомник с «окончательным решением», но... также скончавшийся в 1998 г. (основную часть 2-го тома готовил один из авторов настоящего сообщения). В определенной степени в основном на уровне консультаций, к разработке проблемы адекватности привлекались: историк математики профессор МГУ д.ф.-м.н. Молодший В. Н. (участвовавший в Семинаре в МГУ при обсуждении доклада одного из авторов и позднее давший много ценных советов); известный историк математики, в ту пору сотрудник ИИЕТ АН СССР д.ф.-м.н. Розенфельд Б. А., весьма одобрявший это направление и даже предложивший для новых троек чисел, по аналогии с "кватернионами", название «бунионы»; имели место личные обсуждения и отчасти переписка с ак. Келдышем М. В. (у которого было хобби, близкое к проблеме - «конформные отображения»); ак. Виноградов И. М. (заинтересовавшийся возможным местом новых чисел в теории чисел и приславший письмо с просьбой предоставить ему "все относящиеся к вопросу материалы», но... вскоре скончавшийся) и ряд других специалистов.

Суть решения проблемы адекватности геометрии и алгебры для частного, 3-мерного случая сводится к следующему [1]:

Для 3-мерного случая вводятся на основе натурального ряда числа с тремя единицами «разной природы"

$$i_1 = 1, \quad i_2 = \sqrt{-1}, \quad i_3 = \sqrt{-1}\left(-\sqrt{-1}\swarrow_{-1}\right), \tag{1}$$

где стрелка вниз означает обратную операцию 4-й ступени - «сверхкорень», например:

$$2^{2^2} = {}^3\!\nearrow_2 = 16, \quad {}^3\!\swarrow_{16} = 2. \tag{2}$$

Эти единицы обладают свойством

$$i_1^2 = 1, \quad i_2^2 = -1, \quad i_3^2 = -1 \ldots \tag{3}$$

Для образуемых с помощью этих единиц «сверхкомплексных чисел» справедлива «Обобщенная формула Эйлера»

$$\bar{y} = e^{\bar{x}} = e^{i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + i_3\alpha_3}, \tag{4}$$

$e^{i_1\alpha_1}$ – модуль $\bar{y}$,

α_2, α_3 угол места и азимутальный угол y .

Из (4) получаем аналитическое трехкомпонентное (а не четырехкомпонентное типа «кватернион») представление (т.е. получаем упомянутый «бунион» по Б. А. Розенфельду):

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3 = \\ &= i_1 e^{i_1\alpha_1} + i_2 e^{i_1\alpha_1} \sin\alpha_2\, e^{i_3\alpha_3} + i_3 e^{i_1\alpha_1} \cos\alpha_2 \sin\alpha_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Эти выражения обеспечивают не только возможность обычного, арифметического умножения, деления и т.д. сверхкомплексных чисел при их Эйлеровском (4) или компонентном (5) представлении, но и полную геометрическую адекватность алгебре и наглядность. Например, перемножение двух сверхкомплексных чисел $\overline{y} = e^{\overline{x}}$ и $\overline{y}' = e^{\overline{x}'}$ с помощью (4) очевидно дает

$$\overline{y}\,\overline{y}' = e^{i_1(\alpha_1+\alpha_1')} e^{i_2(\alpha_2+\alpha_2')} e^{i_3(\alpha_3+\alpha_3')}. \quad (6)$$

Это совершенно аналогично ситуации при перемножении обычных комплексных чисел, когда, как известно, углы складываются. Ясно, что при делении углы будут вычитаться. Совершенно аналогично случаю обычных комплексных чисел, несложно видеть, что для сложения сверхкомплексных чисел удобно пользоваться (5), т.е. «проекциями» на оси. «Изюминкой», позволившей понять геометрию таких трёхкомпонентных чисел, являются соображения Н. Морозова [6] (несомненно, идущие от работ Декарта) о том, что мы ошибаемся, если «... геометрические координаты мы неестественно представляем... без элементов ширины и толщины». Применительно к нашему случаю это означает, что «фазовый множитель» $e^{i_3\alpha_3}$ в (5) геометрически соответствует угловому положению «толстой» - вертикальной (мнимой) оси вокруг ее «воображаемой», не имеющей толщины, «собственной» осевой линии, что -совершенно не препятствует трехкомпонентности, но без чего прежние попытки трехкомпонентного представления неполноценны.

Такое трехкомпонентное представление обеспечило адекватность геометрии и алгебры и нашло широкое применение для получения совершенно новых геометрических образов. Так, в [7] представлен целый «математический натюрморт»; в [8] метод обобщен на многомерные образы, в [9] описаны перспективы создания «математической кристалографии»: подобно тому, как на плоскости корень n-ой степени геометрически описывает правильный n-угольник, в пространстве трех измерений легко описываются кристаллы (например: корень 4-й степени из единицы соответствует одному из Платоновых тел - октаэдру, что легко видеть из обобщенной формы Эйлера (4), а многомерное обобщение формулы Эйлера позволяет описывать поликристаллы и даже квазикристаллы...). Разработанное в вышеприведенных и многих других публикациях впервые наглядное адекватное графоаналитическое представление многомерных объектов и процессов, несомненно, перспективно для исследования современных сложных, т.н. «сверхбольших» систем: социальных, экономических, безопасности и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунин В. А. Математика и трудности физики. Сознание и физическая реальность том 2, №2, стр. 71-79.
2. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики, Москва, Наука, 1990, стр. 256.
3. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в 19 столетии, т. 1, Наука, Москва, 1989, стр. 189-192.
4. Декарт Р. Правила для руководства ума, ГСЭИ, М.-Л., 1936.
5. Moon P., Spenser D. N., Theory of Holors, Cambridge, 1986, p. 11.
6. Морозов Н. Принцип относительности в природе и математике, початки знаний, Петербург, 1922, стр. 18.
7. Balakshin O. B., Bunin V. A., Ygnatieff Y. A. «Some examples of threeorthogonal objects of noneuclidian symmetry», in Abstracts of the Interdisciplinary Symmetry Symp., Budapest, pp. 246-248.
8. Balakshin O. B., Bunin V. A, «Multidimensional Symmetry and its adequate graphic-analytical representation in the system «man-mashine-environment», ibid, pp. 25-27.
9. Бунин В. А «Е.С.Федоров как математик», Тезисы докладов Международной конференции «Пространственные группы симметрии и их современное развитие, Ленинград, 14-18 мая 1991 г., Москва, 1991, стр. 44.

Бунин В.А.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ III ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ*.

Введение.

В науке издавна утвердился один не очень распространенный путь передачи знаний последующим поколениям: помимо статей, книг и творческого общения иногда встречается творчество, сводящееся к постановке проблем. Так, известны пара десятков знаменитых вопросов Ньютона, Проблемы Гильберта, Проблемы Ферма и др. Любопытно, что постановка таких проблем или вопросов зачастую возникает на рубеже важных дат. Вспомним, например, что упомянутые Проблемы Гильберта были поставлены на рубеже IXX и XX веков и, кстати , до сих пор не все решены и служат катализаторами мысли. Памятуя утверждение, что правильно поставить вопрос - это, значит, решить его почти наполовину, считаем целесообразным в честь теперешнего уникального даже не столетнего, а тысячелетнего рубежа сформулировать три десятка нерешенных физико-математических проблем для третьего тысячелетия. Эти проблемы ориентировочно сгруппированы по разделам:

- Гармония
- Математика
- Биология (от индивидов до социумов и космических субъектов).

Приведена литература по ряду проблем, отражающая мультидисциплинарный подход к проблеме человека.

Гармония.

1. Разработать математический аппарат, позволяющий вычленить из общего мультидисциплинарного понятия "система" понятие "гармоничная система" что вдохнет новую

---

* Машинописный текст, 09.09.1999 г.

жизнь в проблему всеобщей Гармонии, поставленную на рубеже первого тысячелетия Пифагором и развивавшуюся в течение истекших двух тысячелетий, в основном , только качественно философски [1.2], [1.3,].

2. Обобщить понятие "гармоничная система" на системы, содержащие вместе или порознь циклические, рекурсивные, самоподобные ("фракталы"), функционально-фрактальные ("функторы") и хаотические компоненты с исходными "неэмерджентными" "качествами" M (масса), L (длина), T (время), а также с новыми, возникающими из-за "бесконечностных" особенностей качествами (например, "размерностями Хаусдорфа" для "фракталов") [1.1], [1.2], [1.3].

3. Развить философско-естественнонаучное понятие о "Гармоничной Вселенной", как единой системе, которой (по крайней мере, локально в микро -, мезо - и макро подсистемах) присущи свои подсистемы, получившие названия "Феномен живого", "Космический субъект" [3.1] и т. п., причем между такими феноменами даже различных уровней иерархии принципиально возможно существование "каналов связи" (например, "Реликтовое излучение" по И.М. Дмитриевскому [3.2], "Галактическое воздействие" по Б.А. Астафьеву [3.3], "Воздействие биосферы на индивида" по В.И. Вернадскому [3.4], "Пси – волны А.Л. Чижевского [3.5], "Гравиосвязь" по В.А. Бунину [3.6] и др.). Но в то время, как вся "Гармоничная Вселенная", понимаемая как "Целое", всегда гармонична не только "по определению", но и просто потому, что в ней на каждого "Иня" найдется свой "Янь", а также и должное их "Взаимодействие" (как третий элемент этой "триады"), отнюдь не всегда гармонична любая, не всегда разумно "вычлененная" "Часть" этого "Целого". Например, до последнего времени буквально все изделия "техносферы", т.е. все "деяния рук человеческих" не были гармоничны в том смысле, что их части, особенно все более малые, переставали работать на главную целевую функцию. Кажется, это принципиальное отличие гармоничного от негармоничного или, что то же, живого от неживого впервые заметил Г.В. Лейбниц [3.7], приведя пример шестеренчатого механизма: в "целом" такой механизм работает

на общую задачу, а вот, скажем, микроструктура его (трещины, забоины и т.п.) - отнюдь нет. То же и даже с шикарными произведениями искусства - любая картина при должном увеличении - "мазня". Вопрос о "гармонизации рукотворного" пока открыт (см. соответствующие Проблемы).

4. Выполнить главное завещание Кристаллографа №1 - Е.С. Федорова: создать "Математическую кристаллографию" как современный раздел науки (каждый развитый современный раздел науки, как правило, методологически строится в виде системы исходных уравнений, аккумулирующих практически все начала: "Уравнения Максвелла" содержат главную информацию об электричестве, "Уравнения Эйлера" - о гидродинамике, "Уравнения Ньютона" - о механике и т.д.). Возможным путем решения этой проблемы могло бы быть обобщение мыслей Федорова (обнаруженных одним из авторов в материалах "полуофициального" мемориального кабинета Федорова "в Ленинграде) о гармонии кристаллов, как аналогиях между геометрией 2-го и 3-го измерений. Так, если корень n-й степени из единицы в комплексной плоскости геометрически соответствует правильному n-угольнику, то, например, корень 4-й степени в трехмерном пространстве соответствует правильному многограннику - октаэдру [4.1], [4.2]. Идя этим путем дальше, быть может, удастся математически описать все кристаллы, поликристаллы и квазикристаллы и даже их движения, деформации, рост ... т.е. создать "Математическую кристаллографию" как серьезный, вполне современный раздел науки, а описав жидкие кристаллы, сомкнуть ее с биологией (?).

5. Математически сформулировать частный случай самоорганизации - "самогармонизацию", которую можно качественно выразить в виде "Всеобщего принципа самогармонизации": "Системы, целевые функции которых совпадают, имеют тенденцию к объединению" [5.1]. В биологических системах, например, этот принцип обусловлен тремя факторами: структурой "ключ-замок", градиентностью полей и ненулевой температурой [5.1].

6. Разработать и внедрить технологии, основанные на "самоорганизации", как аналогии биологического роста - "Технологии XXI века" [5.1].

7. Вывести уравнения элементарных частиц, как гармоничных, автомодельных состояний (солитонов, дислокаций) сплошной среды [7.1], [7.2].

8. Разработать новое поколение эталонов, включающее:

- гармоничные (т.е. "неулучшаемые" подобные биологическим объектам) образцовые детали техногенных устройств [8.1];

- эталоны времени (частоты), длины и массы, не чувствительные к ревятивистским воздействиям [8.2].

9. Математически развить предложеннное [9.1] качественное для биологии понятие о солитоне, представив солитон как состояние (статическое, кинематическое, динамическое, роста, эволюционное или иное) локального энергетического образования среды, гармоничного благодаря полной взаимной компенсации сложностей (нерегулярностей), например, геометрической формы солитона со сложностями (неоднородностью, анизотропностью, активностью, "сознательностью", "вычислительностью" и т.д.) внутренней физической структуры солитона, благодаря чему описывающие солитон нелинейные уравнения, обычно не неподдающиеся решению, превращаются в линейные с точными замкнутыми решениями, математически тождественными с соответствующими решениями для простых нелокальных энергетических процессов (как например, плоских волн) в исходной безсолитонной среде [4.2].

10. Распространить естественнонаучное понятие "Гармония" (во многом эквивалентное понятиям "Здравый смысл", "Правильность") на вненаучные области (такие, как, например, политика, религия и др., представители которых в наиболее ответственные и важные моменты обычно говорят и делают, в отличие от ученых, не то, что правильно, а то, что выгодно им или их "клану"). Для этого нужно, по-видимому, преодолеть ограниченность учения Павлова о рефлексах (кстати, учение о рефлексах ведет свое начало от Декарта,

которому сам Павлов поставил памятник в Колтушах, единственный в Стране, да и тот пытались "переплавить", но спасли, спрятав ...). Простые рефлексы, несомненно, пригодны для объяснения простых, непосредственных, выгодных индивиду ответных реакций. Но с точки зрения таких рефлексов представляются противоестественными даже такие поступки, как бросок на амбразуру дзота, сжигание своей руки "на страх врагам", спасение чужого детеныша от львов вожаком обезьяньей стаи и т.п. Где уж тут говорить об объяснении рефлексами предчувствий, интуиции, верований и т.д. Здесь нужны были тонкие "механизмы", которые, кажется, предусмотрел все тот же Декарт: циклическое (а в общем случае - рекурсивное) мышление или моделирование, сводящееся к многократному, циклическому (а если с варьированием - то и рекурсивному) обдумыванию одних и тех же, пусть даже весьма незначительных фактов (сигналов), чем любил пользоваться и сам Декарт. Поясним возможность резкого, теоретически бесконечного, повышения чувствительности за счет цикличности, что, оказывается, уже сделано в современной технике. Так, при радиолокации планет Солнечной системы отраженные сигналы оказываются гораздо слабее уровня шума и, скажем, на экране сигнал не был совершенно виден над "шумовой дорожкой". Никакое усиление не могло принципиально помочь, т.к. вместе с сигналом в той же мере усиливается и шум. Выход из такого, казалось бы, безвыходного положения дал разработанный под руководством ак. В.А.Котельникова метод циклической перезаписи каждого из приходящих сигналов (импульсов). Упрощенно говоря, при синфазном складывании множества "отрезков фотоленты" с одним очередным импульсом на каждом сигналы полезных импульсов складываются идеально синфазно, а шумы (поскольку они на разных лентах разные) - складываются хуже, несинфазно. И отношение сигнал/шум растет теоретически сколь угодно сильно ....Это и есть циклический механизм возникновения порядка из хаоса.

11. Несмотря на бесчисленные публикации, нацеленные на "гуманитарную" расшифровку "кода прекрасного,

гармоничного", т.е. на выяснение причин, по которым людям (да и иным объектам Природы) одно нравится, а другое – нет, вызывает стремление к тому или иному объединению, проблема эта совершенно не продвинулась к решению. Представляется перспективным применение к решению этой проблемы вскользь брошенного Г.Гельмгольцем замечания в его малоизвестной книге [11.1.] примерно 1860 года "Теория музыки" (к сожалению, давно утраченной, так что пересказ будет сравнительно вольным). Суть этого замечания примерно такова: нравится то, что позволяет с меньшими затратами умственного (или иного) труда получить большие результаты (например, получить больше информации). Например: услышав даже небольшой фрагмент хорошей (гармоничной, ритмичной) музыки, человек обычно легко может восстановить информацию обо всем произведении; увидев фрагмент хорошего, гармоничного, правильного рисунка паркета у входа в комнату, человек легко "предскажет" вид паркета и в остальной части комнаты; в математике знание даже небольшого участка значений наиболее "любимой" математиками голоморфной, гармоничной функции позволяет предвычислить ее значения вне участка и т.д. Ну чем это не подтверждение всеобщности принципа наименьшего действия "? Конечно, обидно говорить, что "нравящееся потакает ... лени", но быть может, эта причина - не единственная? Ведь не случайно, скажем, в английском языке глагол "to like" имеет два значения, подтверждающие, что "нравиться" и "быть похожим" - одно и то же... Короче говоря, помимо "ключа лени или принципа наименьшего действия" к "коду Прекрасного" возможен и второй ключ: выяснение возможности объединения субъекта и объекта в единую гармоничную систему? Быть может черты лица отражают совместимость генетических наборов? Пока что это неясно.

12. Подновить, математизировать и гармонизировать основные философские принципы. Например, взяв за основу семь принципов Гермеса [12.1.] и дополнив их принципами Пифагора, Заратустры, Декарта, попытаться превратить их во "Всеобщие уравнения Гармонии". Так, если 1-й принцип Гермеса ("Все есть мысль") скорее всего следует отвергнуть

(мысль, как и информация, невозможна без носителя, т.е. материи или хотя бы энергии), то остальные заслуживают серьезного внимания, особенно пятый ("Принцип Причины и Следствия", отвергающий "истинный хаос"): ведь совсем недавно якобы математически строго доказана невозможность истинного хаоса. Особенно важен Принцип Гермеса "Что вверху – то и внизу", так как именно он (и только он) позволяет понять и математизировать те редкие, связанные с цикличностями (или иными бесконечностями – см. Проблему 2) случаи, когда справедлив "Принцип эмерджентности" [12.2].

Математика

13. Создать "Всеобщую Математику" ("Всеобщую Арифметику") в духе наметок Лейбница, Декарта и др., в которой соблюдался бы "Принцип перманентности Ганкеля" (иногда именуемый "Принципом Ганкеля-Пикопа-Кутюры), имело бы место построение всей математики на основе натурального ряда чисел и полная адекватность алгебры с геометрией (т.е. возникла бы новая дисциплина: "Геометрическая алгебра" [4.2.].

14. Поднять метаматику до уровня тех естественнонаучных дисциплин, достижения которых подлежат юридической защите в качестве изобретений или открытий [4.2], для чего прежде всего исключить из "собственно математики" псевдоматематические наросты" ("кватернионы", "векторы" и т.п.), хотя бы частично полученные не из натурального ряда, а из лингвистики [4.2].

15. Объяснить так называемую "поразительную эффективность" (точнее, адекватность) математики в науках о Природе, показав, что лежащий в основе математики натуральный ряд чисел есть хотя и предельно абстрактное отражение, но отражение именно Природы, а не выдумок (типа, скажем, постулатов школы Бурбаки -внешне произвольных и "своих", разных" персонально для каждого "выдумщика"-математика [4.2.].

16. Разработать аппарат наглядного многомерного адекватного графоаналитического представления информации в соответствии с рекомендациями Декарта [4.2].

17. Гармонизировать символику математических действий, устранив ее архаичность и нематематичность, сведя ее к натуральному ряду чисел [4.2].

18. Перевести проблему "часть и целое" (и родственную ей "переход количества в качество из философских в разряд математических, имея в виду, что еще Аристотелем было доказано наличие всего трех начал, как истинных, исходных качеств (в современной физике это, например, MLT), которые никогда не переходят одно в другое, а во всех случаях и эти и иные, построенные из этих трех исходных, параметры ("качества") при правильной, системной формулировке понятия о "части", так объединяются, что "целое" всегда (кроме случая, оговоренного в Проблемах 2, 12) просто равно совокупности (сумме, произведению или иной композиции, принятой для "целого") своих частей, в то время как "принцип эмерженотности" верен только для случаев некорректной, несистемной формулировки "части". Именно о таком "сохранении качества" говорит равенство "размерностей" в любых уравнениях. Особый случай: переход количества частей в циклические и рекурсивные качества, например, "размерности Хаусдорфа".

19. Подробно разработать действия со "сверхмнимыми" числами отличными от действительных и мнимых, и доказательства их несводимости к комплексным [4.2.].

20. Обобщить понятие "фрактал" до понятия "функтор" в том смысле, что закон построения в сторону малого (да и большого) может быть в более общем случае не постоянным, а функциональным, например, периодическим, стохастическим и даже импульсным (солитонным). Ввести понятие "качество" для "функторов" и связать его с качествами типа MLT [4.2].

21. Ввести математическое понятие о качестве информации на основе энергетического подхода [21.1], полагая:

▲ вещество = состояние материи (вакуума, эфира);

▲ энергия = состояние вещества;

▲ информация = состояние энергии (способность энергии к спусковым, цепным , рекурсивным, эволюционным и др. процессам).

22. Вывести общее "уравнение информодинамики" (подобное "Уравнениям движения энергии в сплошных средах" –Н.А.Умова, "Уравнениям Максвелла" или т.п.) на основе "Закона сохранения количества информации", как частного случая "Закона сохранения энергии" [21.1].

23. Разработать ЭВМ, оперирующие непосредственно с 3-мерными и многомерными сверхкомплексными числами [23.1].

24. Представить теорию графов, орграфов и т.п. как соответствующий раздел многомерной "геометрической алгебры" [4.2].

25. Внедрить "Конверт Пушкина" в цифровую индикацию на почте, в электронике и т.п., разработав соответствующие "стилизованные шрифты", а также аналитическую запись "конверта Пушкина" в соответствии с "Проблемой 24" [25.1].

26. В педагогике и прежде всего в математике сначала уравнять в правах и объемах преподавания образный подход с абстрактным, а затем постепенно сделать образный преобладающим.

27. Разработать (взамен "Эсперанто, латыни и т.п.) единыйязык, основанный на образных многомерных представлениях, соответствующих Декартовым полуосям. В частном случае трех измерений, например, соответственно 6 полуосям каждый термин будет иметь 6 "подтерминов" ("компонент"). Скажем, термин "место" будет иметь "компоненты": "справа" - "слева", "вверху" - "внизу", "вдали" - "вблизи" и т.п. Подумать, соответственно, и о переходе с "буквенной" письменности на "графическую" (типа "иероглифической"), которая более перспективна, чем "Звуко-языковая" (лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать"), так как зрительный канал информации на несколько порядков мощнее "Звуко-языкового".

БИОЛОГИЯ (от индивидов до социумов и "космических субъектов")

28. В дополнение к "Дарвиновской теории эволюции", как теории медленной эволюции вида, разработать "Недарвиновскую теорию эволюции", как теорию быстрой эволюции индивида по принципу технологии "Самогармонизации" при залечивании ран, росте и т.п. вследствие "Гармоничности" структур, возникающих при условии рекурсивности и цикличности под действием градиентных сил [5.1].

29. Развить математическое масштабно инвариантное описание "живого", например, на базе "сверхстепенных" функций [3.1].

30. Открыть новые каналы дуплексной (приемо-передача) биологической связи (зрительной, слуховой, тактильной и др.) на основе используемого в технике "Принципа взаимности": всякий эффект, способный принимать энергию (например, антенна), способен ее и излучать, и наоборот. Применительно к зрению это означает, что глаз, способный принимать энергетическое изображение, обязательно способен его и излучать (пусть и слабо) в зависимости от мысленных образов, что скажем, могло бы "засвечивать" сверхчувствительную фотопленку. Ухо, способное слышать, вполне способно и передавать, скажем, на вживляемые электроды мысленные речевые команды. Аналогично и с тактильным каналом, уже используемым для биопротезов. Разве это не путь к выходу на ЭВМ и к новым каналам непосредственного общения?

31. В связи с зависимостью выживания человека, как вида, от успешности решения проблемы получения экологически чистой энергии, эту проблему вполне резонно отнести именно к биологическим. Отметим три пути, как нам кажется, ведущих к решению этой проблемы:

- полное преобразование вещества в энергию, например, "развертыванием" электрона (магнитной линии в виде вращающейся восьмерки) в волну (магнитное кольцо); это можно представить себе как результат "нанизывания" электрона на проводящую "спицу" с парой изогнутых по касательной острий на конце;

- не "сидеть на горячей печке" – Земле, а использовать возможность в любой точке вывести тепло недр с помощью "тепловой трубы", внизу отбирающей тепло от заполненной металлом большой полости, полученной, например, ядерным взрывом; большой размер полости нужен ввиду слабой плотности теплового потока из ядра Земли; тепловая труба избавит от неприемлемых недостатков известных способов (агрессивность, радиоактивность и загрязненности выводимых на поверхность термальных вод);

- моделирование работы "зеленого листа" по превращению природной энергии в электрическую путем использования ячеек типа острие - впадина, а также обратных эффектов.

32. Пора, наконец, всерьез взяться за решение проблемы: почему "пастыри стад человеческих" всех мастей (и силовой, и духовной, и политиканской) за всю сознательную историю человечества (около 10 тысяч лет) не только не справились как "управленцы", но завели в тупик (хотя бы экологический). Скорее всего, коренная причина в "теореме Геделя", разъясняющей, что никакая система не способна полностью познать себя внутренними средствами (а значит, неспособна и толком управлять собою). Остается опробовать последний шанс: обратиться к "надсистемам". Попытки в этом направлении жрецов всех мастей обречены были на провал в силу ненаучности (т.е. нерешенности проблем 2, 12, 18 и т.п.). Остаются технократы – ученые, но им эту задачу можно будет доверить не ранее, чем они разработают ЭВМ, существенно превосходящую, например, за счет рекурсивных процессов, суммарные возможности всего человечества, которая поэтому и сможет сыграть роль "надсистемы", причем бескорыстной, некоррумпированной…

Прервав на этом поток проблем, убоявшись "бездны премудрости", закончим словами Василия Теркина:

"Я не то еще сказал бы –
Для себя поберегу.

Я не так еще сыграл бы –
Жаль, что лучше не могу".

Литература по Проблемам:

Ввиду некоторого своеобразия и неустановившейся формы использованного здесь жанра "Проблемы", составлен несколько нестандартный справочный аппарат "Литература по Проблемам", нацеленный на удобства читателя при предельной краткости, включающий следующее:

- Название раздела
- Название Проблемы со сквозным номером
- Двойной номер литературного (или иного) источника, в котором первая цифра - номер Проблемы, а отделенная от нее точкой вторая - порядковый номер в пределах Проблемы
- Полное название источника, которое дается только один раз: в литературе по той Проблеме, где источник упомянут в первый раз
- По проблемам, по которым нет ссылок, указаны только названия Проблем и оставлено место на случай внесения ссылок самим читателем.

Раздел ГАРМОНИЯ

1. Проблема "Гармоничная система"

1.1. Азроянц Э.А., Самохвалова В.И. "Проблема человека:
мультидисциплинарный подход. Материалы научной конференции, Москва, Научный семинар "Человек и МИР", 1998.

1.2. Бунин В.А., Арчегов В.Г. Математический аппарат для гармонизации систем. Материалы международной конференции "Анализ систем на пороге XXI века: Теория и практика", том 3, М.: Интеллект, 1997.

1.3. Горбачев В.В., Харитонов А.С. Метод Фибоначчи и модель статистической симметрии. Физика и механика на пороге XXI века: Межведомственный сборник научных трудов. Вып. 1. М.: Изд-во МГУП "Мир книги", 1998, с. 9-15.

2. Проблема "**Гармоничная система с хаотическими компонентами**"

3. Проблема "**Гармоничность Вселенной, Живого и Прекрасного**"

3.1. Лефевр В.А. Космический субъект. М.: Институт психологии РАН, Ин-кварто, 1996, 184с.

3.2. Дмитриевский И.М., несколько публикаций.

3.3. Астафьев Б.А. "Теория единой живой Вселенной" М.: Информациология, 1998.

3.4. Вернадский В.И., ряд публикаций.

3.5. Чижевский А.Л., ряд публикаций.

3.6. Бунин В.А. Система передачи и приема сигналов с помощью гравитационных волн. Изобретение. А.С. СССР № 34798 02.03.59г.

3.7. Лейбниц Г.В. Собрание сочинений.

4. Проблема "**Математическая кристаллография**"

4.1. Бунин В.А. "Е.С.Федоров как математик". Тезисы докладов Международной конференции "Пространственные группы симметрии и их современное развитие" М.: АН СССР, 1991, с. 44.

4.2. Бунин В.А. Математика и трудности физики. Сознание и физическая реальность, 1997. т. 2, № 2, с. 71-79.

5. Проблема "**Самогармонизация**"

5.1. Бунин В.А., Павлова Е.П. Самоорганизация как недарвиновский фактор адаптации природных и техногенных объектов. Тезисы Международной конференции "Экологический опыт человечества: прошлое в настоящем и будущем". М.: Международная академия информатизации, 1995. с. 114-116.

6. Проблема "**Технологии XXI века на основе самогармонизации как принципа биологического роста**".

7. Проблема "**Элементарные частицы как гармоничные автомодельные состояния сплошной среды**"

7.1. Бунин В.А. Элементарные частицы как резонансные состояния вакуума и классификация их как открытых резонаторов". Труды МОИП. Секция физики, М.: Изд. МГУ, 1967. с. 71-72.

7.2. Митрофанов О.И. Элементарные частицы - это элементарно. Изобретатель и рационализатор № 1, 1983, с. 20-23.

8. Проблема "**Новое поколение эталонов: гармоничные и релятивистские**"

8.1. Бунин В.А., Усков М.К. Оценка предельных функциональных возможностей новых поколений техники. Тезисы Всесоюзной научной конференции "Совершенствование планирования, разработки и внедрения новых поколений техники, М: ВИНИТИ, 1986, с.62-63.

8.2. Бунин В.А., Райхлин Р.И. Способ стабилизации высокостабильных эталонов частоты. Изобретение А.С. СССР №149812 27.06.60 г.

9. Проблема "**Уравнение биосолитона как гармоничного объекта"**

9.1. Петухов С.В., Фролов К.В. (предисловие) Биосолитон. М. 1999.

10. Проблема "**Циклическое и рекурсивное мышление как безрефлексный гармоничный механнизм интуиции, предвидения, веры и т.п."**

11.Проблема "**Рассмотреть "Принцип наименьшего действия" и "Принцип Гармоничной композиции (объединения)" как ключи к "коду Прекрасного"**

11.1. Гельмгольц Г. Теория музыки. С.-П., 1860.

12. Проблема "**Подновить, математизировать и гармонизировать основные философские принципы**"

12.1. Кибалион. М. 1998.

12.2. В Мире науки, 1992, №2.

13. Проблема "**Создать Всеобщую Математику (Всеобщую Арифметику) в духе работ Лейбница, Декарта и др.**"

14. Проблема "**Поднять математику до уровня юридического признания в ней изобретений и открытий**"

15. Проблема "**Показать физические корни математики, как причину ее эффективности"**

16. Проблема "**Разработать аппарат наглядного многомерного адекватного графоаналитического представления**"

17. Проблема "**Гармонизировать символику математики**"

18. Проблема "**Математизировать проблему "Часть и Целое" и "Принцип эмерджентности"**

19. Проблема "Подробно изучить "сверхмнимые" числа"

20. Проблема "**Обобщить понятие фрактал**"

21. Проблема "**Ввести математическое понятие о качестве информации**"

21.1. Бунин В.А., Рыжков Л.Н. Общая система как сочленение блоков информации. Международная научно-практическая конференция "Анализ систем на рубеже тысячелетий: теория и практика". М.: Интеллект, 1997, с. 47-48.

22. Проблема "**Вывести общее уравнение информодинамики**"

23. Проблема "Разработать ЭВМ, оперирующие непосредственно со сверхкомплексными числами".

23.1. Бунин В.А., Бунин В.В. Сверхстепень, сверхкорень ... Наука и жизнь. № 10. 1989. С. 140.

24. Проблема "**Графы, как раздел многомерной геометрической алгебры**"

25. Проблема "**Внедрить шрифты, стилизованные в соответствии с "Конвертом Пушкина**".

25.1.Из научного наследия Пушкина, толком не сохраненного и не изданного, помимо экскурсов в «циклическое мышление» заметный интерес для современной цифровой графики и индикации представляет очевидная и однозначная система цифр от 0 до 9 на основе "Конверта Пушкина" (квадрат с двумя диагоналями в виде "графа", подлежащего соответствующей "закраске").

26. Проблема "**Усилить образный подход в педагогике**".

27. Проблема "**Разработать взамен "Эсперанто" единый образный многомерный язык и письменность**".

28. Проблема "**Разработать недарвиновскую теорию быстрой эволюции индивида".**

29. Проблема "**Математика живого**"

30. Проблема "**Открыть новые каналы связи**"

31. Проблема "**Предложить экологически чистые энергоис**точники"

31.1. Работы Митрофанова О.И., Бунина В.А. и др.

32. Проблема "**Предложить путь принципиального улучшения системы управления в геополитике**"

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПИСЬМО А.И.ЛЕНИНА*

Глубокоуважаемый Валентин Алексеевич!

В январе 1998 г. меня приглашали читать лекции на каф. Радиофизики и Электроники в НовГУ (г. Великий Новгород) доцентом. Читал стохаст. радиофизику (4 курс), матем. моделирование и др. курсы. Статью, которую когда-то Вам высылал, улучшил, и её опубликовали в Вестнике НовГУ. Её я Вам высылаю. Сейчас по этой теме подготовил вторую работу, к трудам одной научной конференции.

...

Из-за занятости статья написана от руки, дома пока нет компьютера. Буду Вам очень признателен, если сочтёте нужным способствовать её опубликованию.

…

До свидания. Ваш Саша Ленин.

22 августа 2002 г., Севастополь.

---

* Рукопись

УДК 517

А.И.Ленин

СВЕРХСТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В АНАЛИЗЕ

On the analogy of the grade function, there are determined two types of the new super-grade functions with a rational and substantial indices, and also super exponential and super logarithmic functions, or generated ones. It is shown restriction of the superexponential $a^{\uparrow x}$ function at the base of $a \in [(1/e)^e \le x \le e^{1/e}]$. There are indicated regions of point convergence of some super-grade and functional series, it is given parametric description of the oval curves series, estimatiion of some integrals, and solution of differential equations.

Сверхстепенная функция первого рода

Сверхстепенная функция первого рода с целым положительным показателем определяется формулой

$$y = x^{\left(x^{\cdot^{\cdot^{\left(x^x\right)}}}\right)} = x^{\uparrow n}, \quad x>0, n=1,2,\ldots \tag{1}$$

Порядок вычисления значения функции для заданного $x>0$ и $n \in N$ осуществляется по правилу «сверху вниз» и показывается в формуле (1) круглыми скобками. Для отрицательных целых показателей сверхстепень равна

$$y = x^{\uparrow -n} = (x^{\uparrow n})^{-1}.$$

Условимся считать, что $x^{\uparrow 0} = 1$. Поэтому

$$x^{\uparrow n} \cdot x^{\uparrow -n} = x^{\uparrow (n-n)} = x^{\uparrow 0} = 1.$$

Введем сверхкорень порядка n:

$$y = \uparrow\sqrt[n]{x} = x^{\uparrow 1/n}, \quad x>0.$$

Он определяется как функция, неявно заданная уравнением

$$y^{\uparrow n} = x,$$

решаемым относительно y при заданном положительном x.

Производные для этих функций:

$$\left(x^{\uparrow n}\right)'_x = x^{\uparrow n}\left[\left(x^{\uparrow(n-1)}\right)' \ln x + \frac{1}{x}\cdot x^{\uparrow(n-1)}\right],$$

$$\left(x^{\uparrow -n}\right)'_x = -\left(x^{\uparrow n}\right)^{-1} \cdot \left[\left(x^{\uparrow(n-1)}\right)' \ln x + \frac{1}{x}\cdot x^{\uparrow(n-1)}\right],$$

$$\left(x^{\uparrow 1/n}\right)'_x = 1/\left(y^{\uparrow n}\right)'_y, \quad y = x^{\uparrow 1/n}, \quad x>0.$$

Сверхстепень с показателем $-1/n$ определяем по формуле

$$y = x^{\uparrow -1/n} = (x^{\uparrow 1/n})^{-1}, \quad x>0.$$

Ее производная: $\left(x^{\uparrow -1/n}\right)_x = \dfrac{-(x^{\uparrow 1/n})'_x}{(x^{\uparrow 1/n})^2}, \quad x>0.$

Сверхстепенная функция $y = x^{\uparrow m/n}$ с рациональным показателем $m/n > 0$, где m и n — взаимно простые натуральные числа $((m,n)=1)$, определяется как функция заданная неявно уравнением

$$y^{\uparrow n} - x^{\uparrow m} = 0, \quad m,n \in N, \quad x > 0,$$

а при отрицательном рациональном показателе — формулой

$$y = x^{\uparrow -m/n} = \left(x^{\uparrow m/n}\right)^{-1}, \quad x > 0.$$

Отсюда имеем

$$\left(x^{\uparrow m/n}\right)_x' = \frac{(x^{\uparrow m})_x'}{(y^{\uparrow n})_y'}, \quad (x^{\uparrow -m/n})_x' = \frac{-(x^{\uparrow m})_x'}{(x^{\uparrow m/n})^2 \cdot (y^{\uparrow n})_y'}, \quad x > 0,$$

где m и n — натуральные взаимно простые числа. В общем случае сверхстепень первого рода с произвольным вещественным показателем определяется по формуле

$$y = x^{\uparrow \alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} x^{\uparrow r_n}, \quad \alpha \in R, \quad r_n \in Q, \quad n \to \infty.$$

Вопрос о точной аналитической формуле для производной этой функции остается открытым. Свойства сверхстепени:

1) $\left(x^{\uparrow m/n}\right)^{\uparrow n/k} = x^{\uparrow m/k}$, если $(m,n,k)=1, \quad m,n,k \in N;$

2) $x^{\uparrow m/n} \neq x^{\uparrow mk/nk}$, если $(m,n) = 1, \quad k \in N, \quad k \geq 2;$

3) $x^{\uparrow \alpha} \cdot x^{\uparrow -\alpha} = x^{\uparrow 0} = 1 \quad \forall \alpha \in R$.

Сверхстепенная функция порождает сверхпоказательную и сверхлогарифмическую функции первого рода:

$$y = a^{\uparrow x}, \; x \in R;$$
$$y = \log\uparrow_a (x), \; x > 0, \quad 0 < a \neq 1.$$

Свойства сверхпоказательной функции очевидны. Укажем свойства сверхлогарифмической функции:

1) $\log\uparrow_a (1) = 0$; $\log\uparrow_a (a) = 1$;

2) $\log\uparrow_a \left(x^{\uparrow m/n}\right) = \frac{m}{n}\log\uparrow_a (x)$, если $\log\uparrow_a (x) = \frac{p}{m}$, где p,m,n — натуральные и взаимно простые между собой числа).

3) $\log\uparrow_a (c) = \frac{\log\uparrow_b (c)}{\log\uparrow_b (a)}$, если $\log\uparrow_a (c) = \frac{m}{n}$, $\log\uparrow_b (a) = \frac{p}{m}$, $(p,m,n) = 1$;

4) $\log\uparrow_{a^{\uparrow 1/\alpha}} (b) = \alpha \cdot \log\uparrow_a (b)$, если $\alpha = \frac{n}{m}$, $\log\uparrow_a (b) = \frac{p}{n}$, $(p,n,m) = 1$, $p,n,m \in N$.

Сверхпоказательная функция $a^{\uparrow x}$, $(1/e)^e \leq a \leq e^{1/e}$ и ее свойства

Покажем что сверхстепенная функция $f(x) = a^{\uparrow x}$ при $1 < a \leq e^{1/e}$, $x \in R$ является функцией ограниченной. Предварительно исследуем числовую последовательность $\left(a^{\uparrow n}\right)$, $a > 1$, $n \in N$ (или $x_1 = a$, $x_{i+1} = a^{x_i}$, $i = 1,2,\ldots$). Эта последовательность монотонно возрастает и ограничена в интервале $a \in \left(1, e^{1/e}\right]$, поэтому имеет предел. Действительно, при $a > 1$ по свойству степенной функции $a < a^a < \cdots < a^{\uparrow n} < \ldots$, т.е. последовательность

$\left(a^{\uparrow n}\right)$ монотонно возрастает. Если предел последовательности $\left(a^{\uparrow n}\right)$ существует и равен α, то α есть корень уравнения

$$a^{x} = x, \quad a > 1. \tag{2}$$

Предполагая существование корня α, докажем ограниченность сверху последовательности $\left(a^{\uparrow n}\right)$. Действительно, при $a > 1$ и $\alpha > 1$

$$1 < a^{1} = x_{1} < a^{\alpha} = \alpha, \text{ т.е. } x_{1} < \alpha.$$

Пусть теперь при некотором i $x_{i} < \alpha$. Тогда $x_{i+1} = a^{x_{i}} < a^{\alpha} = \alpha$. Следовательно, $x_{i+1} < \alpha$ при любом $i = 1,2,\ldots,$ т.е. последовательность $\left(a^{\uparrow n}\right)$ ограничена сверху и имеет предел α. Остается доказать существование корня уравнения (2). Это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\ln x}{x} = \ln a. \tag{3}$$

Функция $\dfrac{\ln x}{x}$ возрастает при $0 < x < e$, а при $x > e$ убывает, при этом

$$\max_{(0,\infty)} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln e}{e} = e^{-1}.$$

Если $0 < \ln a < \dfrac{1}{e}$ $\left(\text{или } 1 < a < e^{1/e}\right)$, то уравнение (3) имеет два корня, заключенные в интервалах $(1,e)$ и (e,∞). При $\ln a = e^{-1}$ $\left(\text{или } a = e^{1/e}\right)$ уравнение (3) имеет единственный корень, равный e; $1 < c \le e.$

Итак, при $1 < a \le e^{1/e}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} a^{\uparrow n} = \alpha,$$

где α — наименьший корень уравнения (2). Этот предел можно записать в эквивалентной форме

$$\lim_{n\to\infty}\left(c^{1/c}\right)^{\uparrow n} = c, \quad 1 < c \le e, \tag{4}$$

поскольку при $c > 1$ $c^{1/c} > 1$, причем $\left(c^{1/c}\right)^{c} \equiv c.$

Можно показать что предел (4) сохраняется, если n будет стремиться к бесконечности непрерывным образом. Поэтому сверхпоказательная функция первого рода

$$y = \left(c^{1/c}\right)^{\uparrow x}, \quad 1 < c \le e, \quad x \in R, \tag{5}$$

обладает следующими свойствами:

$$\lim_{x\to\infty}\left(c^{1/c}\right)^{\uparrow x} = c, \ \lim_{x\to-\infty}\left(c^{1/c}\right)^{\uparrow x} = 1/c, \ 1 < c \le e;$$

$$A = f(0-0) = \lim_{n\to\infty}\left(c^{1/c}\right)^{\uparrow -1/n} = \left(c^{-1/c}\right)_{c^{-1/c}}^{\frac{1}{\ldots}}; \ B = f(0+0) = \lim_{n\to\infty}\left(c^{1/c}\right)^{\uparrow 1/n} = \left(c^{1/c}\right)_{c^{-1/c}}^{\frac{1}{\ldots}}$$

(т.е. $x = 0$ — точка разрыва функции (5)).

График функции $f(x) = \left(c^{1/c}\right)^{\uparrow x}$, $1 < c \le e$, $x \in R$, показан на рис.1. График обратной к ней сверхлогарифмической функции $y = \log\uparrow_{b}(x)$, $b = c^{1/c}$, $1 < c \le e$, $\dfrac{1}{c} < x < c$, — на рис.2.

В работе [3] показано, что последовательность $x_0 = 1,\ x_{i+1} = a^{x_i},\ i = 0,1,2\ldots,$ при $(1/e)^e \le a < 1$ сходится к единственному корню s_0 уравнения

$$a^{a^x} = x, \quad x > 0.$$

Следовательно, функция $a^{\uparrow x}$ в области R имеет смысл как при основании $a \in \left[(1/e)^e, 1\right)$, так и при $a \in \left[(1/e)^e, e^{1/e}\right]$, ее свойства аналогичны приведенным, она ограничена снизу и сверху. Случай $a = 1$ очевиден.

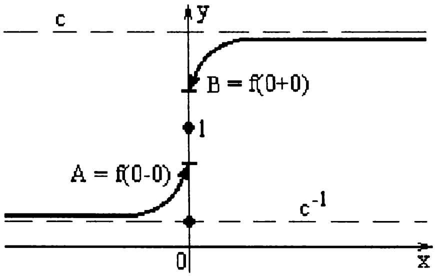


Рис.1. График сверхпоказательной функции $f(x) = (c^{1/2})^{\uparrow x},\ x \in R,\ 1 < c \le e$

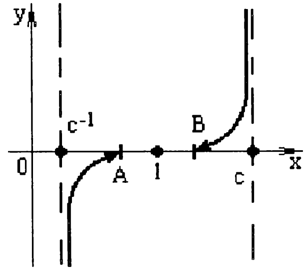


Рис.2. График обратной сверхлогарифмической функции

Исследование некоторых функциональных рядов, содержащих сверхстепени

Рассмотрим сверхстепенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{\uparrow n}. \tag{6}$$

Он сходится на интервале $\left(0, e^{1/e}\right)$, если числовой ряд, составленный из положительных коэффициентов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, сходится. Действительно, если $0 < x \le 1$, то $x^{\uparrow n} \le 1$, $a_n x^{\uparrow n} \le a_n$ и, следовательно, на этом интервале ряд сходится по признаку сравнения. При $1 < x \le e^{1/e}$ последовательность $\left(x^{\uparrow n}\right)$, как ранее было доказано, монотонно возрастает и ограничена, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, тогда ряд (6) сходится по признаку Абеля. Например, при $s > 1$, $1 < x \le e^{1/e}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot x^{\uparrow n}$ сходится.

Сверхстепенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{\uparrow -n},$$

сходится в области $x > e^{1/e}$ по признаку Дирихле, если а) $x^{\uparrow -n} \to 0$, $n \to \infty$ и б) n — частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены в совокупности

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le M \quad \forall_n \in N$$

(условие а) в области $\left(e^{1/e}, \infty\right)$ выполнено, а условие б) надо потребовать).

Функциональный ряд вида

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\uparrow x}},$$

сходится при $x > 1$ по признаку Лейбница. Можно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\uparrow x})^{-1}$ сходится при $x > 1$.

Важным инструментом исследований в аналитической теории чисел и других областях математики является дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}, \quad s > 1,$$

где $p_k\left(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots\right)$ пробегает все простые числа.

Если заменить p_k^s на сверхстепень $p_k^{\uparrow s}$, то получаем

$$\zeta^{\uparrow}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{< n >^{\uparrow s}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^{\uparrow s}}\right)^{-1}, \quad s > 1, \tag{7}$$

где $< n >^{\uparrow s} = \left(p_1^{\uparrow s}\right)^{\alpha_1}, \ldots, \left(p_k^{\uparrow s}\right)^{\alpha_k}$ отвечает каноническому представлению числа $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$. Доказательство представления (7) проводится аналогично [2].

Параметрическое описание кривых

В точке $x = 0$ функция $f(x) = (|x| + 1)^{\uparrow 2} - 1$ имеет наименьшее значение, равное нулю, и является аналогом функции x^2. Запишем параметрические уравнения овальной кривой («окружности»):

$$\left[(|x| + 1)^{\uparrow 2} - 1\right] + \left[(|y| + 1)^{\uparrow 2} - 1\right] = 1 \text{ или } (|x| + 1)^{\uparrow 2} + (|y| + 1)^{\uparrow 2} = 3.$$

Очевидно, это будет функция вида

$$\begin{cases} x = x_s(t) = \operatorname{sgn}(\cos t)\,[(1 + \cos^2 t)^{\uparrow 1/2} - 1], \\ y = y_s(t) = \operatorname{sgn}(\sin t)\,[(1 + \sin^2 t)^{\uparrow 1/2} - 1], \end{cases} \tag{8}$$

где t — угол поворота радиуса вектора точки (x, y) против часовой стрелки, $t \in R$.

При любом вещественном t имеем

$$\left(|x_s(t)| + 1\right)^{\uparrow 2} + \left(|y_s(t)| + 1\right)^{\uparrow 2} = 3, \quad |x_s(t)| \le 2^{\uparrow 1/2} - 1, \quad |y_s(t)| \le 2^{1/2} - 1.$$

Можно вывести осцилляторное дифференциальное уравнение, соответствующее функциям (8). Аналогичным образом параметризуются овальные кривые более общего вида

$$x^{\uparrow(2n+1)}+y^{\uparrow(2n+1)}=a,\quad \left[(|x|+1)^{\uparrow 2n}-1\right]+\left[(|y|+1)^{\uparrow 2n}-1\right]=r,\quad n\in N, a,r>0,$$

и другие кривые.

Производную сверхстепенной функции $y=x^{\uparrow m/n}$ получаем по правилу дифференцирования функции, заданной неявно

$$\left(x^{\uparrow m/n}\right)'_x=\frac{\left(x^{\uparrow m}\right)'_x}{\left(y^{\uparrow n}\right)'_y},\quad x>0.$$

Следовательно,

$$\int\frac{\left(x^{\uparrow m}\right)'_x}{\left(y^{\uparrow n}\right)'_y}dx=x^{\uparrow m/n}+C,\quad x>0.$$

В частности,

$$\int x^x(1+\ln x)dx=x^x+C,\quad x>0,$$

причем каждый из интегралов в левой части является неберущимся. Аналогично имеем

$$\int\frac{dx}{x\left(1+\ln x^{\uparrow 1/2}\right)}=x^{\uparrow 1/2}+C,\int\frac{(1+\ln x)dx}{y^y(1+\ln y)\ln y+y^{y-1}}=x^{\uparrow 2/3}+C,\ y=x^{\uparrow 2/3},$$

$$\int\frac{dx}{\left(y^{\uparrow n}\right)'_y}=\int\frac{dx}{x\left(\left(y^{\uparrow(n-1)}\right)'_y\cdot\ln\left(x^{\uparrow 1/n}\right)+\dfrac{y^{\uparrow(n-1)}}{x^{\uparrow 1/n}}\right)}=x^{\uparrow 1/n}+C,\ y=x^{\uparrow 1/n},\quad x>0.$$

Производная функции $y=x^x$ $y'=x^x(1+\ln x),\quad x>0$. Она является решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dx}=y(x)\cdot(1+\ln x),\quad y(1)=1.$$

Аналогично, функция $y=x^{\uparrow 2/3}$ есть решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\ln x}{y^{y-1}+y^y\cdot(1+\ln y)},\quad y(1)=1.$$

И таких примеров можно привести много.

Сверхстепенные функции второго рода

Вычисление значения сверхстепенной функции второго рода в отличие от функции первого рода осуществляется по правилу «снизу вверх»:

$$y=\left(\left(\left(x^x\right)^x\right)^{\cdots}\right)^x=x^{\uparrow\uparrow n}=x^{x^{n-1}},\quad x^{\uparrow\uparrow -n}=\left(x^{\uparrow\uparrow n}\right)^{-1},\quad x>0.$$

Сверхкорень второго рода $y=\uparrow\uparrow\sqrt[n]{x}=x^{\uparrow\uparrow 1/n}=x^{\downarrow\downarrow n},\quad x>0,$ определяется неявно уравнением

$$y^{\uparrow\uparrow n}-x=0,\quad x>0.$$

Сверхкорень $x^{\uparrow\uparrow m/n}$ второго рода с положительным рациональным показателем $\left(\dfrac{m}{n}>0,\ (m,\ n)=1\right)$ есть функция, заданная неявно уравнением

$$y^{\uparrow\uparrow n}-x^{\uparrow\uparrow m}=0,\quad x>0.$$

Сверхстепень с отрицательным рациональным показателем определяем по формуле

$$y=x^{\uparrow\uparrow -m/n}=\left(x^{\uparrow\uparrow m/n}\right)^{-1},\qquad x>0,$$

а для произвольного вещественного α — по формуле

$$x^{\uparrow\uparrow\alpha}=\lim_{r_n\to\alpha}x^{\uparrow\uparrow r_n},\quad \alpha\in R,\quad r_n\in Q,\quad n\to\infty.$$

Так с большой точностью можно вычислить числа $\pi^{\uparrow\uparrow\sqrt{2}}$, $e^{\uparrow\uparrow\pi}$, $2^{\uparrow\uparrow\sqrt{3}}$, $(\ln 2)^{\uparrow\uparrow\pi}$ и т.д.

Сверхпоказательные и сверхлогарифмические функции второго рода определяются аналогично функциям первого рода. Отметим некоторые свойства сверхстепени второго рода с рациональным показателем:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\uparrow\uparrow n}=1\,(0<x<1);\quad x^{\uparrow\uparrow n}\ge x,\quad x>0;$

2) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\uparrow\uparrow n}=1\,(n\ge 2);\quad \lim\limits_{n\to\infty}x^{\uparrow\uparrow n}=+\infty,\quad (x>1);$

3) $\left.\left(x^{\uparrow\uparrow n}\right)'\right|_{x=1}=1;\quad \min\limits_{(0,\infty)}x^{\uparrow\uparrow n}=\left(e^{-\frac{1}{n-1}}\right)^{\uparrow\uparrow n};$

4) $\left(x^{\uparrow\uparrow n}\right)'=x^{\uparrow\uparrow n}\cdot x^{n-2}\cdot[1+(n-1)\ln x];$

5) $\left(x^{\uparrow\uparrow n}\right)''_{xx}=x^{\uparrow\uparrow n}\cdot x^{n-2}\cdot\left[\dfrac{n-1}{x}+[(n-1)\ln x+1]\cdot\left[(n-1)x^{n-2}\ln x+\dfrac{x^{n-1}+n-2}{x}\right]\right];$

6) функция $y=x^{\uparrow\uparrow m/n}$, $x>0$, есть решение задачи Коши

$$y^{n-2}\cdot[1+(n-1)\ln y]\cdot y'(x)-x^{m-2}\cdot[1+(m-1)\ln x]=0,\quad y(1)=1;$$

7) $$\left(x^{\uparrow\uparrow m/n}\right)'_x=\frac{\left(x^{\uparrow\uparrow m}\right)'_x}{\left(y^{\uparrow\uparrow n}\right)'_x}=\frac{x^{\uparrow\uparrow m}\cdot x^{m-2}(1+(m-1)\ln x)}{y^{\uparrow\uparrow n}\cdot y^{n-2}(1+(n-1)\ln y)}=\begin{bmatrix}y^{\uparrow\uparrow n}=x^{\uparrow\uparrow m}\\ (m,n)=1\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{x^{m-2}\cdot[1+(m-1)\ln x]}{y^{n-2}\cdot[1+(n-1)\ln y]},\quad x>0;$$

8) $\displaystyle\int\frac{x^{m-2}\cdot[1+(m-1)\ln x]}{y^{n-2}[1+(n-1)\ln y]}dx=x^{\uparrow\uparrow m/n}+C,\quad y=x^{\uparrow\uparrow m/n},\ (m,n)=1;$

9) $\left(x^{\uparrow\uparrow m/n}\right)^{\uparrow\uparrow n/k}=x^{\uparrow\uparrow m/k},\ (m,n,k)=1;$

10) $$\int_0^1\frac{dx}{x^{\uparrow\uparrow k}}=\int_0^1 x^{\uparrow\uparrow -k}dx=\int_0^1 x^{-x^{k-1}}dx=\left[x^{n(k-1)+1}=e^{y}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[n(k-1)+1]^{n+1}}\cdot\frac{\partial(n+1)}{n!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[n(k-1)+1]^{n+1}}$$

Автор выражает искреннюю благодарность академику В.А.Бунину, обратившему мое внимание на важность изучения сверхстепени.

---

1. Бунин В.А. Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов. Секция физики МОИП при МГУ, 1967. С.71-73.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т.2. С.362.
3. Егоров А. // Квант. №10, 1977. С. 34-39.

А.И.Ленин

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СВЕРХСТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ*

Введение сверхстепени как новой математической операции в математическом анализе может обогатить математику новыми направлениями исследований. Как и степенная функция сверхстепенная функция порождает сверхпоказательную и сверхлогарифмическую функции. Для сверхпоказательной функции имеет место аналог формул Эйлера.

В данной работе приводятся формулы для производных сверхпоказательной, сверхстепенных и других функций, их разложения в ряды и другие результаты.

1. <u>Производные сверхпоказательной, сверхстепенной и верхлогарифмисеской функции.</u>

Сверхстепенная функция с натуральным показателем определяется по формуле

$$y = x^{\left[x^{\cdot^{\cdot^{(x^x)}}}\right]} = x^{\uparrow n}, \quad x > 0,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Порядок вычисления значения этой функции для заданного x>0 и n∈N осуществляется по правилу "сверху вниз" и показывается в формуле (1) круглыми скобками. Для отрицательных целых показателей сверхстепень равна

$$y = x^{\uparrow -n} = (x^{\uparrow n})^{-1} \qquad (2)$$

Условимся считать, что $x^{\uparrow 0} = 1$. Тогда $x^{\uparrow n} \cdot x^{\uparrow -n} = x^{\uparrow 0} = 1$

Сверхстепень с рациональным показателем *m/n>0*, где *m* и *n* – взаимно простые натуральные числа ((m, n)=1), определяется как функция, заданная неявно уравнением

* Рукопись

$$y^{\uparrow n} - x^{\uparrow m} = 0, \quad m, n \in N, \quad x > 0 \tag{3}$$

а при отрицательном рациональном показателе – формулой

$$x^{\uparrow -m/n} = (x^{\uparrow m/n})^{-1}$$

По правилу дифференцирования функции, заданной неявно, имеем

$$(x^{\uparrow m/n})'_x = \frac{(x^{\uparrow m})'_x}{(y^{\uparrow n})'_y} \tag{4}$$

В общем случае сверхстепень с произвольным вещественным показателем определяется формулой

$$y = x^{\uparrow \alpha} = \lim_{\substack{r_n \to \alpha \\ n \to \infty}} x^{\uparrow r_n}, \; x > 0, \; r_n \in Q \tag{5}$$

Свойства сверхстепенной функции:

1. $x^{\uparrow \alpha} \cdot x^{\uparrow -\alpha} = x^{\uparrow 0} = 1, \quad -\infty < \alpha < \infty$;

2. $(x^{\uparrow \frac{m}{n}})^{\uparrow \frac{n}{k}} = x^{\uparrow m/k}, \quad m, n, k \in N,$ $\quad m, n, k$ – попарно взаимно просты ((m, n, k)=1);

3. $x^{\uparrow m/n} \neq x^{\uparrow m \cdot k / n \cdot k}$, если $(m, n) = 1, \; k \geq 2, \; k \in N.$

Сверхстепенная функция порождает взаимно обратные сверхпоказательную и сверхлогарифмическую функции:

$$y = a^{\uparrow x}, \; x \in R, \; y = \log \uparrow_a (x), \; x > 0, \; 0 < a \neq 1.$$

Свойства сверхпоказательной функции повторяют свойства сверхстепени, а свойства сверхлогарифмической функции следующие:

1. $\log\uparrow_a(1)=0;\ \log\uparrow_a(a)=1;$

2. $\log\uparrow_a(x^{\uparrow m/n})=\dfrac{m}{n}\cdot\log\uparrow_a(x),$ *если* $\log_a(x)=\dfrac{p}{m}$, где *p*, *m, n* – попарно взаимно простые натуральные числа;

3. $\log\uparrow_a(c)=\dfrac{\log\uparrow_b(c)}{\log\uparrow_b(a)}$, если

$\log\uparrow_a(c)=\dfrac{m}{n},\log\uparrow_b(a)=\dfrac{p}{m}$, $(p, m, n)=1$;

4. $\log\uparrow_{a^{\uparrow 1/\alpha}}(b)=\alpha\cdot\log\uparrow_a(b),$ если

$\log\uparrow_a(b)=\dfrac{p}{n},\quad (p,n,m)=1,\ \ p,n,m\in N$

Чтобы обобщить формулу (4) для производной сверхстепенной функции на произвольный вещественный показатель найдем производную для сверхпоказательной функции $a^{\uparrow x}$. Запишем производную $a^{\uparrow x}$ в точке $x=\dfrac{m}{n}\quad(m\in Z,k\in N)$:

$$\left.\frac{da^{\uparrow x}}{dx}\right|_{x=\frac{m}{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\uparrow(\frac{m}{k}+\frac{1}{n})}-a^{\uparrow\frac{m}{k}}}{\frac{1}{n}}\qquad(6)$$

Значение $a^{\uparrow(\frac{m}{k}+\frac{1}{n})}$ в (6) представим в виде

$$y_n(a,\frac{m}{k}) = a^{\uparrow(\frac{m}{k}+\frac{1}{n})} = a^{\uparrow\frac{m}{k}} \cdot (1 + b_n(a,\frac{m}{k}) \cdot \frac{1}{n}).$$

Вычисляя $y_n(a,\frac{m}{k})$ из уравнения $(y_n(a,\frac{m}{k}))^{\uparrow k\cdot n} = a^{\uparrow(m\cdot n+k)}$, находим

$$b_n(a,\frac{m}{k}) = n \cdot (\frac{y_n(a,\frac{m}{k})}{a^{\uparrow\frac{m}{k}}} - 1)$$

Следовательно, при фиксированных *m* и *k* имеем

$$\left.\frac{da^{\uparrow x}}{dx}\right|_{x=\frac{m}{k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\uparrow\frac{m}{k}}(1 + b_n(a,\frac{m}{k}) \cdot \frac{1}{n} - 1)}{\frac{1}{n}} = a^{\uparrow\frac{m}{k}} \cdot \lim_{n\to\infty} b_n(a,\frac{m}{k}) = a^{\uparrow\frac{m}{k}} \cdot b(a,\frac{m}{k})$$

Для произвольного $x \in R$ полагаем

$$\frac{da^{\uparrow x}}{dx} = a^{\uparrow x} \cdot b(a,x), \quad x \in R \tag{7}$$

Полагая *b(a,x)* бесконечно дифференцируемой, имеем

$$\frac{d^n a^{\uparrow x}}{dx^n} = a^{\uparrow x} \cdot B_n(a,x), \tag{8}$$

где

$$B_1(a,x) = b(a,x), \quad B_n(a,x) = B_{n-1}(a,x) \cdot b(a,x) + B'_{n-1}(a,x), \quad n \geq 2.$$

Составим ряд Маклорена для функции $a^{\uparrow x}$:

$$a^{\uparrow x} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(a)}{i!} x^i, \quad \alpha_i(a) = (a^{\uparrow x})^{(i)}\Big|_{x=0} \qquad (9)$$

Дифференцируем ряд (9) почленно, имеем

$$\frac{d^n a^{\uparrow x}}{dx^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+i}(a)}{i!} x^i, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

При $a=e$ будем кратко записывать
$B_n(a,x) = B_n(x), \;\; B_1(a,x) = b(x), \;\; n = 2, 3, \ldots$, так что

$$e^{\uparrow x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} x^k, \quad x \in R, \quad \gamma_k = (e^{\uparrow x})^{(k)}\Big|_{x=0}$$

Для определения коэффициентов α_k можно воспользоваться известными методами численного дифференцирования по таблично заданным значениям функции $a^{\uparrow x}$ с помощью интерполяционных многочленов. Так при $f(x) = e^{\uparrow x}$ с шагом $\Delta x = 1/4$ получаем табличные значения
$f(0) = 1, \;\; f(1/4) \cong 1{,}54, \;\; f(1/2) \cong 1{,}76, \;\; f(3/4) \cong 2{,}23, \;\; f(1) \cong 2{,}72,$

$$f(5/4) \approx 7{,}28, \quad f(3/2) \cong 7{,}52, \quad f(7/4) \approx 11{,}33, \quad f(2) \approx 15{,}15$$

и находим, что

$$\gamma_1 = f'(0) \cong 2, \quad \gamma_2 = f''(0) \cong 4, \quad \gamma_3 \cong f^{(3)}(0) \cong 113, \ldots$$

Функцию $b(a,x)$ в формуле (7) представим в виде степенного ряда

$$b(a,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i(a)}{i!} x^i.$$

Коэффициенты $b_i(a)$ этого ряда находим из системы равенств для коэффициентов рядов в выражении (7), записанного в форме

$$\begin{aligned}&\alpha_1(a)+\alpha_2(a)\cdot x+\frac{\alpha_3(a)}{2!}x^2+...=\\&=(1+\alpha_1(a)\cdot x+\frac{\alpha_2(a)}{2!}x^2+...)\cdot(b_0(a)+\frac{b_1(a)}{1!}x+\frac{b_2(a)}{2!}x^2+...)\end{aligned} \qquad (10)$$

Перемножая ряды в правой части формулы (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях выражения, имеем:

$$\begin{aligned}&b_0(a)=\alpha_1(a),\\&b_1(a)=\alpha_2(a)-\alpha_1^2(a),\\&b_2(a)=\alpha_3(a)-2\alpha_1(a)\cdot b_1(a)-\alpha_1(a)\cdot\alpha_2(a),\\&...........\end{aligned}$$

Сверхпоказательная функция $a^{\uparrow x}$ имеет одну особенность. Она состоит в том, что при основаниях $a\in[(1/e)^e,\ e^{1/e}]$, функция $a^{\uparrow x}$ является ограниченной [2]:

$$\frac{1}{\alpha}<a^{\uparrow x}<\alpha,\quad a\in(1,e^{1/e}], \qquad (11)$$

где α - наименьший корень уравнения $a^x=x$.

Если $a=c^{\uparrow c}$, то уравнение $(c^{1/c})^{\uparrow x}=x$ имеет наименьший корень x=c и тогда неравенство (11) можно переписать в виде

$$\frac{1}{c}<(c^{1/c})^{\uparrow x}<c,\quad 1<c\le e,\quad x\in R \qquad (12)$$

При $c\in(1,e]$ имеем а=с$^{1/c}\in(1,e^{1/e}]$, $e^{1/e}\cong 1{,}444666...$

Таким образом, ограниченную сверхпоказательную функцию удобно представлять в виде

$$y=(c^{1/c})^{\uparrow x},\ \ 1<c\le e,\ \ x\in R$$

При $\frac{1}{e}\le c<1$ функция $(c^{1/c})^{\uparrow x}$ также ограничена:

$$c<(c^{1/c})^{\uparrow x}<\frac{1}{c},\ \ -\infty<x<\infty$$

При c=1 ограниченность $(c^{1/c})^{\uparrow x}$ очевидна.

Примерами ограниченных сверхпоказательных функций являются

$$((\frac{1}{e})^{e})^{\uparrow x},\ \ ((\frac{1}{2})^{2})^{\uparrow x},\ \ (2^{\frac{1}{2}})^{\uparrow x},\ \ (e^{\frac{1}{e}})^{\uparrow x}$$

Значения функций $1,445^{\uparrow x}$, $(3^{\frac{1}{3}})^{\uparrow x}$, $(\frac{3}{2})^{\uparrow x}$ уже стремятся к бесконечности при $x\to\infty$.

Производная сверхлогарифмической функции равна

$$(\log\uparrow_a(x))^1_x=\frac{1}{x^1_y}=\frac{1}{(a^{\uparrow y})'_y}=\frac{1}{a^{\uparrow y}\cdot b(a,y)}=\frac{1}{x\cdot b(a,\log\uparrow_a(x))}$$

При $a=e$ имеем $(\ln\uparrow(x))'_x=\dfrac{1}{x\cdot b(\ln\uparrow(x))}$, $x>0$

Следовательно

$$\int_1^x\frac{dt}{t\cdot b(\ln\uparrow(x))}=\ln\uparrow(x),\ \ \int_0^x b(t)dt=\ln(e^{\uparrow x}),\ \ \int_0^x b(a,t)dt=\ln(a^{\uparrow x})$$

Разложение сверхлогарифмической функции в ряд имеет вид

$$y = \ln\uparrow(1+x) = \omega_1 x - \frac{\omega_2}{2}x^2 + \frac{\omega_3}{3}x^3 - \frac{\omega_4}{4}x^4 + \ldots \qquad (13)$$

где $\omega_1 = (b(0))^{-1}$, $\omega_2 = \frac{1}{b(0)} + \frac{b'(0)}{b^3(0)}, \ldots$, $|x|<1$

Формула (13) есть результат обращения ряда $x = e^{\uparrow y} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{i!} y^i$ по формуле Бюрмана-Лагранжа.

Наконец, с помощью формулы (7) приходим к важной формуле:

$$(x^{\uparrow\alpha})'_x = (e^{\uparrow\alpha\cdot\ln\uparrow(x)})'_x = e^{\uparrow\alpha\cdot\ln\uparrow(x)} \cdot b(\alpha\cdot\ln\uparrow(x)) \cdot \frac{\alpha}{x\cdot b(\ln\uparrow(x))} =$$

$$= \alpha\cdot x^{\uparrow\alpha}\cdot x^{-1}\cdot\frac{b(\alpha\cdot\ln\uparrow(x))}{b(\ln\uparrow(x))}, \quad x>0, \quad \alpha\in R$$

При изучении сверхстепенных функций удобно применять полиномы Бернштейна для их аппроксимации.

В заключение этого пункта применим найденные формулы дифференцирования к раскрытию некоторых предельных выражений.

Так, используя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\uparrow\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\uparrow\frac{\ln\uparrow(1+x)}{x}} = e^{\uparrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\uparrow(1+x)}{x}} = e^{\uparrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)b(\ln\uparrow(1+x))}} = e^{\uparrow\frac{1}{b(0)}}$$

Отсюда,

$$\lim_{t\to 0}(1+x\cdot t)^{\uparrow\frac{b(0)}{t}} = e^{\uparrow b(0)\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\uparrow(1+x\cdot t)}{t}} = e^{\uparrow x\cdot b(0)\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{(1+x\cdot t)b(\ln\uparrow(1+x\cdot t))}} = e^{\uparrow x}$$

В частности, $e^{\uparrow x} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n})^{\uparrow n\cdot b(0)}$.

Рассмотрим еще одно предельное выражение:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\uparrow\frac{1}{x}} = e^{\uparrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\uparrow(x)}{x}} = e^{\uparrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot b(\ln\uparrow(x))}} = e^{\uparrow 0} = 1.$$

2. <u>Сверхпоказательная функция с комплексным аргументом.</u>

Представление сверхпоказательной функции $e^{\uparrow x}$ в виде ряда Тейлора (9) позволяет аналитически продолжить её с вещественной оси на комплексную плоскость. Сначала разложим $e^{\uparrow x}$ с чисто мнимым аргументом $(i=\sqrt{-1})$:

$$z(t) = e^{\uparrow it} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k!}(it)^k = (1-\frac{\gamma_2}{2!}t^2+\frac{\gamma_4}{4!}t^4-\ldots)+i(\gamma_1\cdot t-\frac{\gamma_3}{3!}t^3+\frac{\gamma_5}{5!}t^5-\ldots) = \tag{14}$$
$$= \cos\uparrow(t)+i\cdot\sin\uparrow(t) = \sqrt{\cos\uparrow^2(t)+\sin\uparrow^2(t)}\cdot e^{i\varphi(t)},$$

где

$$\sin\uparrow(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\gamma_{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot t^{2n-1},$$

$$\cos\uparrow(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\gamma_{2n}}{(2n)!}\cdot t^{2n},$$

$$\varphi(t) = arctg\frac{\sin\uparrow(t)}{\cos\uparrow(t)}.$$

Очевидно, что $e^{\uparrow -it} = \cos\uparrow(t) - i\sin\uparrow(t)$.

Следовательно, имеют место формулы, аналогичные формулам Эйлера:

$$\begin{cases} \cos\uparrow(t) = \dfrac{e^{\uparrow it} + e^{\uparrow -it}}{2} \\ \sin\uparrow(t) = \dfrac{e^{\uparrow it} - e^{\uparrow -it}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathrm{c}h\uparrow(t) = \dfrac{e^{\uparrow t} + e^{\uparrow -t}}{2} \\ \mathrm{s}h\uparrow(t) = \dfrac{e^{\uparrow t} - e^{\uparrow -t}}{2} \end{cases} \qquad (15)$$

Замечаем также, что

$$\cos\uparrow^2(x) + \sin\uparrow^2(x) = \left(\frac{e^{\uparrow it} + e^{\uparrow -it}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\uparrow it} - e^{\uparrow -it}}{2}\right)^2 = 1,$$
$$\mathrm{c}h\uparrow^2(x) + \mathrm{s}h\uparrow^2(x) = \left(\frac{e^{\uparrow t} + e^{\uparrow -t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\uparrow t} - e^{\uparrow -t}}{2}\right)^2 = 1, \qquad (16)$$

В предложении (16) мы применили важное свойство сверхстепени: $e^{\uparrow t} \cdot e^{\uparrow -t} = 1$. Этот факт можно выразить ещё на языке коэффициентов $\gamma_k = f^{(k)}(0)$ в разложении $f(t) = e^{\uparrow t}$ в ряд Тейлора.

Мы имеем

$$e^{\uparrow t} \cdot e^{\uparrow -t} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} t^k\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \gamma_m}{m!} t^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n!} t^n, \quad \gamma_0 = 1,$$
$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(-1)^{n-k} \gamma_k \gamma_{n-k}}{k!(n-k)!} \qquad (17)$$

В формуле (17) $\sigma_0 = \gamma_0 \cdot \gamma_0 = 1$, а $\sigma_{2n-1} = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ Действительно,

$$\sigma_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(2n-1)!(-1)^{2n-1-k}}{k!(2n-1-k)!} \gamma_k \gamma_{2n-1-k} = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k = 0, \quad \text{n=1,2,...}$$

поскольку $a_0 = -a_{2n-1}, \ a_1 = -a_{2n}, \ \ldots, \ a_{n-1} = -a_n$

Условие $\sigma_{2n} = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ надо потребовать:

$$\sigma_{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!(-1)^{2n-k}}{k!(2n-k)!}\gamma_k\gamma_{2n-k}=$$

$$=2\left(\frac{\gamma_0\gamma_{2n}}{0!(2n)!}(-1)^{2n}+\frac{\gamma_1\gamma_{2n-1}}{1!(2n-1)!}(-1)^{2n-1}+\ldots+\frac{\gamma_{n-1}\gamma_{n+1}}{(n-1)!(n+1)!}(-1)^{n+1}+\left(\frac{\gamma_n}{n!}\right)^2\cdot(-1)^n=0, \tag{18}$$

$$\gamma_0=1,\quad n=1,2,\ldots$$

Условие (18) при n=1 имеет вид

$$2\cdot\frac{\gamma_2}{0!2!}-\left(\frac{\gamma_1}{1!}\right)^2=0 \quad \text{или} \quad \gamma_2=\gamma_1^2$$

при n=2

$$2\left(\frac{\gamma_4}{0!4!}-\frac{\gamma_1\gamma_3}{1!3!}\right)+\left(\frac{\gamma_2}{2!}\right)^2=0 \quad \text{или} \quad \gamma_4=4\gamma_1\gamma_3-3\gamma_2^2,$$

при n=3

$$2\left(\frac{\gamma_6}{6!}-\frac{\gamma_1\gamma_5}{1!5!}+\frac{\gamma_2\gamma_4}{2!4!}\right)-\left(\frac{\gamma_3}{3!}\right)^2 \quad \text{или} \quad \gamma_6=6\gamma_1\gamma_5-15\gamma_2\gamma_4+10\gamma_3^2$$

и т.д.

Замечаем, что коэффициенты γ_{2n} в разложении $e^{\uparrow t}$ при четных степенях есть некоторые билинейные формы от коэффициентов $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{2n-1}$.

Следовательно, по табличным значениям функции $e^{\uparrow t}$ методами численного дифференцирования достаточно вычислять лишь коэффициенты $\gamma_1,\gamma_3,\gamma_5,\ldots$ при нечетных степенях t.

Поскольку

$$|z(t)|=|e^{\uparrow it}|=\sqrt{\cos\uparrow^2(t)+\sin\uparrow^2(t)}=1,$$

то

$$z(t)=e^{\uparrow it}=e^{i\varphi(t)}=\cos\varphi(t)+i\sin\varphi(t)=\cos\uparrow(t)+i\sin\uparrow(t),$$

$$\cos\uparrow(t)=\cos\varphi(t),\quad \sin\uparrow(t)=\sin\varphi(t),\quad \varphi(\text{t})=\text{arctg}\,\frac{\sin\uparrow(t)}{\cos\uparrow(t)},$$

$$z'(t)=(e^{\uparrow it})'_t=(\cos\uparrow(t))'+i(\sin\uparrow(t))'=e^{it}\cdot i\cdot(arctg\frac{\sin\uparrow(t)}{\cos\uparrow(t)})'_t=i\cdot e^{\uparrow it}\cdot c(t),$$

$$c(t)=(\sin\uparrow(t)'\cdot\cos\uparrow(t)-\sin\uparrow(t)\cdot(\cos\uparrow(t))'$$

Отсюда,

$$\frac{d\sin\uparrow(t)}{dt}=\cos\uparrow(t)\cdot c(t)=\cos\varphi(t)\cdot\varphi'(t)$$

$$\frac{d\cos\uparrow(t)}{dt}=-\sin\uparrow(t)\cdot c(t)=-\sin\varphi(t)\cdot\varphi'(t)$$

Функция $y_1=\sin\uparrow(t)$ удовлетворяет осцилляционному уравнению

$$y_1''+(\varphi'(t))^2\cdot y_1=\varphi''(t)\cdot\cos\uparrow(t),$$

а функция $y_2=\cos\uparrow(t)$ - уравнению

$$y_2''+(\varphi'(t))^2 y_2=-\varphi''(t)\cdot\sin\uparrow(t)$$

Рассмотрим теперь сверхпоказательную функцию $e^{\uparrow z}$ с комплексным аргументом z в полной форме. Имеем

$$w=e^{\uparrow z}=e^{\uparrow r\cdot e^{i\varphi}}=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k}{k!}z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k r^k}{k!}e^{ik\varphi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k r^k}{k!}\cos k\varphi+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k r^k}{k!}\sin k\varphi$$

Найденные функции $u(r,\varphi)$ и $v(r,\varphi)$ в виде функциональных рядов при фиксированном $r=|z|$ являются рядами Фурье, а при фиксированном $\varphi=\arg z$ эти ряды степенные по переменной r.

Функции $u(r,\varphi)$ и $v(r,\varphi)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi},\quad \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r},$$

записанных в полярных координатах, на всей комплексной плоскости. Следовательно, функция $e^{\uparrow z}$ - целая. Её производные определяются формулами

$$(e^{\uparrow z})^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_{n+k}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_{n+k} r^k}{k!} \cos k\varphi + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_{n+k} r^k}{k!} \sin k\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично в математику вводится сверхстепенная функция (второго рода), отправляясь от конструкции вида

$$y = (((x^x)^x)^{\cdots})^x = x^{\uparrow n}, \quad x > 0, \quad n \in N,$$

где аргумент x повторяется n раз и порядок вычислений, показываемый в формуле круглыми скобками, осуществляется "снизу вверх". Для новых функций $x^{\uparrow\uparrow\alpha}$, $a^{\uparrow\uparrow x}$, $\log\uparrow\uparrow_a(x)$ ранее приведенные рассуждения повторяются.

Возникает обширная программа исследований. В теории вероятностей можно ввести аналоги законов распределения Гаусса, Пуассона, показательного и т.д. В теории аппроксимации функций изучать ортогональные многочлены и функциональные ряды с базисными функциями $\{x^{\uparrow n}\}$ и $\{\cos\uparrow(nx), \sin\uparrow(nx)\}$. Несложно модифицируются методы асимптотических оценок интегралов – методы Лапласа, стационарной фазы, перевала. Эти методы находят важные применения в математической и теоретической физике, механике и технике.

Автор выражает искреннюю благодарность академику* В.А.Бунину за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бунин В. А. Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов..// В кн. "Математическая физика. Электродинамика. История физики", М., МОИП, секция физики, 1967, с71-73
2. Ленин А.И. Сверхстепенные функции и некоторые их применения в анализе. //Вестник Новгородского государственного университета, №13, 1999, с.95-102.

* В то непростое для росссийской науки время, когда централизованный контроль над научной деятельностью ослаб, возникли новые академии помимо нескольких главных. В.А.Бунин был членом Международной академии энергетических инверсий им. П.К.Ощепкова, поэтому обращение "академик" для того времени имело формальное оправдание (прим. сост.).

О СИСТЕМАТИКЕ В ЧИСЛОВОЙ АТОМИСТИКЕ*

В настоящее время соотношение между физикой и математикой приобретает всё более подчинённый характер. А именно: математика подчинила себе физику. Причину этого хорошо объясняет крупный английский физик Г. Дингл.“Математика - неизмеримо более сильный инструмент, чем силлогизм Аристотеля, и её использование в качестве языка, на котором выражаются наблюдаемые факты, было столь успешным, что в ум физиков незаметно закралась идея того, что что бы она ни говорила, есть истина...В соответствии с этим появилась привычка полагать, что физическая теория необходимо будет здоровой, если содержащаяся в ней математика безупречна; вопрос о том, существует ли в природе нечто, соответствующее этой безупречной математике вовсе не рассматривается как вопрос; это полагается само собой разумеющимся" [1,30].

Сами математики склонны признавать физическую обусловленность своей науки. "Конкретные частные факторы должны стимулировать математику внести свой вклад в определённую сферу реальности. Полёт в абстракции должен означать нечто большее, чем простой взлёт; отрыв от земли неотделим от возвращения на землю, даже если один и тот же пилот не в состоянии вести корабль через все фазы полёта. Самые отвлечённые чисто математические занятия могут быть обусловлены вполне ощутимой физической реальностью. То обстоятельство, что математика - эта чистая эманация человеческого разума - может столь эффективно помочь в понимании и описании физического мира, требует особого разъяснения, и не случайно этот вопрос всегда привлекал внимание философов [2,26-27].

---

* В кн. "Новые философские проблемы физики", МОИП, секция физики, М., Гл. ред. восточной литературы, 1977, с.65-72

Однако постепенно, по мере упрочения аксиоматического метода, эта связь математики с внешним миром начинает осознаваться все слабее."Математика - это замкнутый в себе микрокосм, обладающий, однако, мощной способностью отражать и моделировать любые процессы мышления и, вероятно, всю науку вообще…Можно даже пойти дальше и сказать, что математика необходима для покорения природы человеком и вообще для развития человека как биологического вида, ибо она формирует его мышление"[3,8].

Не останавливаясь на критическом рассмотрении некоторого налёта идеализма в приведённых высказываниях, мы хотели бы не просто обратить внимание на довольно очевидный процесс математизации физики, а также - на самозамыкание математики, но и на то, что, вероятно, наступило время и для обратного процесса "физикализации" математики, "раскрытию" её замкнутого в себе микрокосма.

Одной из наиболее выдающихся побед аксиоматики можно рассматривать числовую систематику. "Программа аксиоматических исследований дала ответ на ряд основополагающих вопросов о числах и породила новые понятия, оказавшиеся в высшей степени плодотворными. Аксиоматический метод стал применяться во всей современной математике, им даже пользуются преподаватели математики старших классов школы. Один учитель недавно сказал мне: "В былое время все эти процедурные правила были погребены в изысканных печатных трудах и в значительной степени игнорировались на уроках. Сегодня они успешно включены в основной курс математики и учащимся грозит опасность, понимая, что 2+3 в соответствии с коммутативным законом равно 3+2, так и не узнать, что сумма равна 5. Конечно, здесь всё несколько утрированно. Исключительное внимание, уделяемое ныне аксиоматике, можно было бы сравнить с занятиями в таком хореографическом кружке, где еженедельно проводятся дискуссии о хореографии, но никто никогда не танцует. Хотелось бы, чтобы в математике, как, впрочем, и во всём остальном, всегда соблюдалось разумное чувство меры"[4,41-42]. Однако, для соблюдения "разумного чувства меры" требуется не просто призыв к нему математиков, а разработка некой программы, которую можно было бы противопоставить аксиоматическому методу.

В конкретном случае числовой систематики аксиоматическому методу Пеано (подробнее см. напр. [5]) можно противопоставить генетический метод введения чисел, излагаемый ниже.

По установившейся в математике традиции обычно прежде рассматриваются числа (точнее - натуральные числа), а затем - операции над ними (напр. [5, 6]). Сами числа при этом постулируются; достаточно вспомнить высказывание Кронекера "Натуральные числа создал господь Бог, всё остальное - дело рук человеческих". Мы предлагаем прежде определить операции, причём определить их не математически, а "физически", как абстракции от определённых процессов реального мира. В основу предлагаемой систематики кладётся атомистический подход.

Атомистика чисел и атомистика вещества в древности различались нестрого [7] .Однако числовая атомистика возникла раньше; раньше произошла в ней и первоначальная систематизация. Систематика атомов химических элементов, произведённая в 1869 г. Д.И.Менделеевым, хотя совершилась позже, но оказалась более естественной. Для целей своей систематики Менделеев нашёл "ключ" - повторяемость химических свойств элементов по мере роста атомного веса. Это дало возможность, во-первых, отвести каждому элементу своё место в таблице и, во-вторых, предсказать существование новых элементов.

"Ключом" предлагаемой числовой систематики является повторяемость самих операций повторяемости. Хотя многие крупные математики делали попытки такого рода [8], их усилия не приводили к успеху, поскольку операции выше возведения в степень принято считать бесперспективными. Обычно рассматривается лишь одна операция, следующая за возведением в степень, которую член МОИП В.А.Бунин назвал "возведением в сверхстепень" и показал приложимость к ряду физических проблем [9]. Нельзя признать данную терминологию удачной, поскольку непонятно, как же следует называть операции, следующие за "возвышением в сверхстепень".

Для нового подхода требуется новая терминология, иллюстрируемая табл.1. Любую операцию повторения, напр. x+x+...+x или xxx....x назовём репетицией, а возникающие при этом числа - репетитами. Назовём рангом операции число $\underline{R}$ (с обязательной чертой под ним), соответствующее порядку следования операции. Если принять сложение за операцию ранга 1, то для умножения $\underline{R}$=2, для возведения в степень $\underline{R}$ =3 и т.д., что полностью соответствует традиционным ступеням. Однако сложение не является начальной операцией. Так, написав рекуррентное соотношение $x\underline{R-1(}x\underline{R}(a-1))=a\underline{R}x$, в справедливости которого легко убедиться подстановкой, получим для $\underline{R}$=+: $x\underline{R-1}x=x+1$. Здесь "x" - повторяемое число, а "a" - показатель повторения. Операцию ранга B-1 назовём "следованием за x" или просто "следованием". Подставив в рекуррентную формулу $\underline{R-1}$, получим $\underline{R-2}=x\underline{R-2}x=a$.Эту операцию уместно назвать "перечислением". Наконец, подставив это значение в рекуррентную формулу, получим $1\underline{R-3}1=1$, что можно сопоставить только с "отождествлением", ибо 1≡1=1. В последующих подстановках "отождествление" переходит само в себя, т.е. ему не предшествует никакая другая операция и поэтому ему можно приписать $\underline{R}$=0. Остальные ранги будут такими: $\underline{1}$-перечисление, $\underline{2}$-следование, $\underline{3}$-сложение, $\underline{4}$-умножение, $\underline{5}$-возведение, $\underline{6}$-секстирование, $\underline{7}$-септнрование, $\underline{8}$-октавирование и т.д. Числа этих рангов назовём так: $\underline{0}$-единица, $\underline{1}$-униальные (т.е. состоящие из единиц), $\underline{2}$-секутивные ("следующие"), $\underline{3}$-целые, $\underline{4}$-рациональные, $\underline{5}$- квинтовые, $\underline{6}$-секстовые и т.д. Теперь можно упразднить знаки действий и вместо 2+3 писать $2\underline{3}3$,вместо 2*3 - $2\underline{4}3$ и т.д. Для многочленов введём знаки: 0, I, A, Σ, П, Г, Δ, E соответственно; многочлен произвольного ранга обозначим знаком Ξ.

Существует еще две операции, не меняющие ранга репетиции: пермутация и супплементация. Пермутация означает $P(a,x)=(x,a)$; $P(a\underline{R}x)=x\underset{\rightarrow}{R}a=a\underset{\leftarrow}{R}x$. В последнем случае стрелочки различают репетицию $(\underset{\rightarrow}{\_})$ и пермутацию $(\underset{\leftarrow}{\_})$. Напр., запись

$2\underset{\rightarrow}{\underline{5}}3$ будет означать 3^2, а $2\underset{\leftarrow}{\underline{5}}3$ - 2^3. Супплементация означает построение ряда чисел, являющегося дополнением репетитов данного ранга до униального ряда. Так, дополнением репетитов вида $2\underline{4}x=2\cdot x=2, 4, 6, 8$...(чётные числа) будет ряд 1, 3, 5, 7... (нечётные числа). Супплементация приложима и к отдельному числу; так $S(2\underline{5}3)=5, 6, 7, 8$ - числа, лежащие между квадратами 2 и 3. Генеральным рядом репетитов (ГР) назовём числа, встречающиеся в рядах репетитов хотя бы однажды и расположенные по мере возрастания, а дополнение к нему - генеральным рядом дополнений (ГД). Так, для $\underline{4}$ существует бесконечное число рядов репетитов: 2x=2, 4, 6.., 3x=3, 6, 9.., 4x=4, 8, 12.., ..;ГР$\underline{4}$=2, 4, 6, 8, 9, 10...(сложные числа); ГД$\underline{4}$=1, 3, 5, 7,11... (простые числа). Интересно, что хотя репетиты и пермутанты образуют разные ряды в общем случае, их ГР и ГД совпадают.

Все перечисленные прямые операции не приводят к появлению новых классов чисел. Операция, обратная репетиции (инверсия), сама по себе тоже не приводит к ним. Так, если $2\underline{4}x=6$, то x=6:2=3, или, в новых обозначениях, если $2\underline{4}x=6$, то $x=6\dot{\underline{4}}2=3$.Точка над ранговым числом обозначает инверсию. При этом следует различать стрелки: $\underset{\rightarrow}{\dot{\underline{5}}}$ обозначает извлечение корня, а $\underset{\leftarrow}{\dot{\underline{5}}}$ - логарифмирование.

Новые классы чисел возникают, если инверсии производятся над дополнениями. Назовём метаномами числа, образованные от инверсий над дополнениями репетитов и параномами - числа, образованные от инверсий над дополнениями пермутантов. Метаномы и параномы назовём ортономами; в частных случаях они могут совпасть с репетитами. Несовпадающие ортономы назовём расширениями или, по рангам, $\underline{2}$-0, $\underline{3}$-отрицательные, $\underline{4}$-дроби, $\underline{5}$-радикалы и логарифмы (квинтрады и квинтлоги), $\underline{6}$-секстрады и секстлоги и т.д. Заметим, что расширения появляются со сдвигом на 2 ранга по сравнению с репетитами и являются своеобразными дополнениями униальных чисел до таких, над областью которых выполняются инверсии данного ранга. Вопрос о размещении расширений на оси униальных (или натуральных, если говорить о репетитах $\underline{3}$ ранга) чисел решается довольно просто: расширения 2 и 3 откладываются перед единицей, причём расширение 3 (отрицательные числа) размещается зеркально отражённым по сравнению с натуральными. Остальные расширения внедряются между натуральными числами. Репетиты с расширениями, организованными на числовой оси, назовём кластерами.

В пределах кластера полностью выполняются операции данного ранга над

Табл. I

```
Ранг        0            I           2            3               4               5              6
Отождествл. Перечислен. Следование   Сложение     Умножение       Возведение      Секстирование
I=I=....=I=I
  a раз   III.....II=a
               a раз  xIII.....II=a+x                                                      Прямые
                                                                                           операции
I0I0....0I=I                 a раз   x+x+x+...+x=ax
          III.....II=a2I              a раз    x·x·x·....·x=x^a ..........x   x^x^x
                  x2I2I....2I=a3x                    a раз   x^x^x.          =^a x   ...x^x^x=x^a
                                x3x3x3...3x=a4x                    a раз                a раз
Следование репетиций →              x4x4x4...4x=a5x
                                                   x5x5........5x=a6x
Репетиты:                                                      x6x6......6x=a7x
```

I0I=I	III=II	I2I=II	I3x=2,3,4,5,	I4x=I,2,3,4,	I5x=I,2,3,4,	I6x=I,2,3,4,5,6,
20I=I	2II=III	22I=ШI	23x=3,4,5,6,	24x=2,4,6,8,	25x=I,4,9,I6	26x=I,4,27,256,3I25,
30I=I	3II=IIII	32I=ШI	33x=4,5,6,7,	34x=3,6,9,I2	35x=I,8,27,64	36x=I,I6,I9683
.....	....	......	....	....	....	....
ГР (за вычетом IRx и aRI):		ШI,ШШ,ШШI,	4,5,6,7,8,9,	4,6,8,9,I0,I2	4,8,9,I6,25,27	4,I6,27,256,3I25,
Дополнения:		22I=I,П.	23x=I,2.	24x=I,3,5,7,	25x=2,3,5,6,7,	26x=2,3,5,6,7,8,
		32I=I,П,Ш.	33x=I,2,3.	34x=I,2,4,5,	35x=2,3,4,5,6,	36x=2,3,4,5,6,7,
		....	....	....	....	....
ГД		I,П,Ш.	I,2,3.	I,2,3,5,7,II,	I,2,3,5,6,7,I0	I,2,3,5,6,7,8,
Пермутанты:	III=II	I2I=II	I3x=2,3,4,5,	I4x=I,2,3,4,	I5x=I.	I6x=I.
	II2=III	22I=Ш	23x=3,4,5,6,	24x=2,4,6,8,	25x=2,4,8,I6,	26x=2,4,I6,65536,
	II3=IIII	32I=Ш	33x=4,5,6,7,	34x=3,6,9,I2	35x=3,9,27,8I,	36x=3,27, 3^{27},
Генеральный ряд пермутантов (кроме IRx и aRI)	....	ШI,ШШ,ШШI	4,5,6,7,8,9,	4,6,8,9,I0,I2	4,8,9,I6,25,27	4,I6,27,256,3I25,

Продолжение табл. I

Ранг 0 I 2 3 4 5 6

Отождествление — Повторное перечисление — Предшествование — Вычитание — Деление — Извлечение — Секстрадирование

I≡I≡..≡I=I
а раз IIII..II=a
а раз IIII....Iy=y−a
а раз y−x−x−...−x=y:a
а раз y:x:x:...:x=$\sqrt[a]{y}$
а раз $\sqrt[x]{\sqrt[x]{\ldots\sqrt[x]{y}}}$=$_a\wedge$y
а раз $^a\wedge$y=

Обратные операции

I$\dot{0}$I$\dot{0}$..$\dot{0}$I=I.
I$\dot{1}$I$\dot{1}$..$\dot{1}$I=a.
I$\dot{2}$I$\dot{2}$...I$\dot{2}$y=a$\dot{3}$y
x$\dot{3}$x$\dot{3}$....x$\dot{3}$y=a$\dot{4}$y
x$\dot{4}$x$\dot{4}$....x$\dot{4}$y=a$\dot{5}$y
x$\dot{5}$x$\dot{5}$...x$\dot{5}$y=a$\dot{6}$y
x$\dot{6}$x$\dot{6}$.....x$\dot{6}$y=a$\dot{7}$y

Следование инверсий репетиций

Ортономы:
Метаномы

2$\dot{2}$I=II, III (0, I)   2$\dot{3}$y=−I, 0   2$\dot{4}$y=$\frac{I}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$,   2$\dot{5}$y=$\sqrt{I}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,   2$\dot{6}$y=$\wedge$2, $\wedge$3, $\wedge$5,
3$\dot{2}$I=II, III, IIII (0, I, 2)   3$\dot{3}$y=−2, −I, 0   3$\dot{4}$y=$\frac{I}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$,   3$\dot{5}$y=$\sqrt[3]{I}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$,   3$\dot{6}$y=$_3\wedge$I, $_3\wedge$2, $_3\wedge$3, $_3\wedge$4,
....

Параномы
2$\dot{2}$I=II, III (0, I)   2$\dot{3}$y=I, 0   2$\dot{4}$y=2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$,   2$\dot{5}$y=$\log_2$I, $\log_2$3,   2$\dot{6}$y=ћ$\log_2$I,
3$\dot{2}$I=II, III, IIII (0, I, 2)   3$\dot{3}$y=2, I, 0   3$\dot{4}$y=3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$,   3$\dot{5}$y=$\log_3$I, $\log_3$2,   3$\dot{6}$y=ћ$\log_3$I,
....

Расширения   0   −I, −2, −3, $\frac{I}{2}$, $\frac{I}{3}$, $\frac{I}{4}$, ... $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, ... $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, .. $\log_3$2, ..$\log_2$3... $\wedge$2, $\wedge$3.. $_3\wedge$2, ћ$\log_3$2, ..

Трансномы нуля: 0$\dot{4}$y=$\frac{I}{0}$, $\frac{2}{0}$, $\frac{3}{0}$.7.   0$\dot{5}$y=$\sqrt[0]{I}$, $\sqrt[0]{2}$, $\sqrt[0]{3}$..   0$\dot{6}$y=$_0\wedge$I, $_0\wedge$2,
0$\dot{4}$0=0:0=?   0$\dot{5}$0=$\sqrt[0]{0}$=$\log_0$0=?   0$\dot{6}$0=$_0\wedge$0=ћ$\log_0$0
±I, −2..   2a$\dot{5}$y=$\sqrt{-I}$, $\sqrt{-2}$. $\sqrt[4]{-I}$,
a$\dot{5}$y=$\log_a$−I, $\log_a$−2..$\log_I$±x
−a$\dot{5}$y=$\log_{-a}$I, $\log_{-a}$2..$\log_{-I}$±x

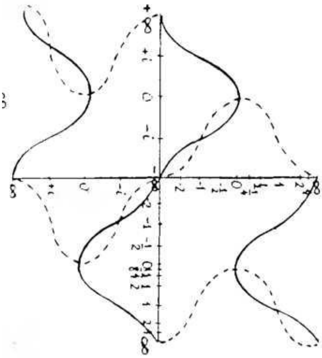


Рис. I.
—— $y=x^2$
– – $y=\sqrt{x}$

натуральными числами. Однако эти же операции в общем случае оказываются невыполнимыми над расширениями не только данного, но и двух предшествующих рангов. Так, инверсия $\dot{\underline{4}}$ невыполнима для расширения $\underline{2}$ (т.е. деление на 0 невозможно), $\dot{\underline{5}}$ невыполнима для расширения $\underline{3}$ (т.е. корни чётной степени и логарифмы отрицательных чисел среди действительных чисел не существуют). Инверты от расширений назовём трансномами. Трансномы, отличающиеся от любых чисел кластера, назовём продолжениями.

Первые продолжения появляется при инверсиях $\underline{4}$ от нуля: это ∞ и неопределенности вида 0:0, ∞:∞ и 0• ∞.Число продолжений нуля увеличивается при переходе к более высоким рангам; так, для $\underline{5}$ появляются неопределенности вида $0^0, \sqrt[0]{0},\ \log_0 x,\ \sqrt[0]{x}$. К сожалению, в области продолжений нуля процесс упорядочения ещё не был произведён, так что одни неопределенности не выражаются через другие и не образуют самостоятельной числовой подсистемы, подобно мнимым числам.

Второй тип продолжений - продолжения при инверсиях $\dot{\underline{5}}$ от ± 1. Сюда относятся выражения $\sqrt[0]{-1},\ \sqrt[4]{-1},\ \log_{-1} 1,\ \log_1 -1,\ \log_{-a} x,\ \log_1 x$ и т.д.Строго говоря, сюда относятся инверты $\dot{\underline{5}}$ от отрицательных чисел (т.е. от расширений $\underline{3}$), однако существует и особое продолжение от +1: $\log_1 x$. Переход к операциям $\underline{6}$ ранга увеличивает число этих продолжений. В отличие от продолжений нуля, продолжения единицы (± 1) упорядочены: для них введена новая единица: $i = \sqrt[2]{-1}$. Выбор новой единицы - акт достаточно произвольный: вместо $\sqrt[2]{-1}\ (2\underset{\rightarrow}{\dot{5}}\text{-}1)$ можно было избрать $\log_2 -1\ (2\underset{\leftarrow}{\dot{5}}\text{-}1),\ \log_1 -1\ (1\underset{\leftarrow}{\dot{5}}-1)$ или даже $\log_1 2\ (1\underset{\rightarrow}{\dot{5}}2)$. Последний пример интересен тем, что вообще не содержит отрицательных чисел для генерации мнимой единицы. Поэтому упорядочение данных продолжений уже будет менее объективным, чем прежде - за счёт выбора новой единицы. Продолжения, которые упорядочены и систематизированы с одновременным выбором удобной единицы, назовём конструктами. Известные в математике мнимые числа - конструкты; продолжения нуля - бесконечности и неопределённости - не конструкты, хотя трансфинитные числа - интересная попытка создания конструктов для части продолжений нуля. Вопрос о том, являются ли мнимые числа единственными возможными конструктами ± 1,остаётся пока открытым.

Третий тип продолжений - продолжения при инверсиях $\dot{\underline{6}}$ от дробей. Этот тип продолжений, также как и продолжения при инверсиях $\dot{\underline{7}}$ от радикалов и логарифмов, пока остаётся гипотетическим. Вопрос о размещении конструктов на числовой оси является довольно сложным. Так, продолжения 0 не получили на оси вообще никакого места; мнимые числа были помещены на особую ось, чем была нарушена традиция располагать новые числа на продолжении оси или на самой оси путем внедрения в промежутки между старыми числами; если будут найдены продолжения дробей, вопрос об их размещении опять потребует нового решения. А между тем, ничто не мешает размещать расширения в промежутках между старыми числами, а продолжения - на продолжении числовой оси, как показано на рис.1. Это оказывается возможным потому, что и расширения, и продолжения являются в конечном счёте производными от униального ряда, т.е. рядами дискретными, атомистическими.

Что нового даёт предлагаемая систематика чисел по сравнении с существующей? На наш взгляд, весьма много.

1. Прежде всего выявлен единый алгоритм построения чисел любой сложности как вполне объективный процесс, не зависящий от произвола математиков (кроме незначительного вмешательства соображений удобства при переходе от продолжений к конструктам). Это даёт возможность строить вою арифметику на чисто материалистической основе. Не божественный промысел и не гениальность отдельных личностей лежит в основе этого алгоритма, а стремление к осуществлению возможно большего числа операций над числами, совершенствование этого орудия познания материального мира, единство всех чисел - в единстве алгоритма их образования.

2. Данная систематика помогает понять диалектику человеческого познания, процесса освоения различных чисел. Письменные источники зафиксировали весьма высокий уровень оперирования с числами у исторически наиболее древних народов - вплоть до операций 5 ранга. Это породило иллюзию, что сложение - наиболее простая операция, осуществляющаяся над уже готовыми числами. Данная систематика отодвигает начальную операцию назад на три ранга и показывает, что числа не могли возникнуть иначе как в процессе оперирования над ними, в процессе трудовой деятельности по подсчитыванию различных моделей предметов (пальцев, камешков и т.д.).

3. Данная систематика позволяет дать определённое освещение историческому процессу. Так, во многих странах отрицательные числа были освоены позже дробей, в то время как по предложенной схеме они должны были быть освоены раньше. Это можно считать интересной исторической особенностью и пытаться вскрыть её причины. При наличии данной логической схемы можно уже ставить вопрос о

соотношении исторического и логического в процессе освоения чисел.

4. Кроме доисторического и исторического процесса, данная систематика способна осветить и ближайшее будущее арифметики. Так, на очереди стоит вопрос о систематизации продолжений нуля и о поисках продолжений дробей. Тем самым проявляется эвристическая функция предложенной систематики чисел.

5. Данная систематика привнесла принципиально иной подход к математической символике: если прежде в алгебре конкретную цифру заменяли более общим символом - буквой, то теперь достаточно общие знаки математических действий, порой дублировавшие друг друга $(+,\ -,\ \cdot,\ :,\ /,\ -,\ \sqrt{\ }$, и т.д.) заменены конкретными цифрами- $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$,…Это позволяет в случае необходимости полностью обойтись одними цифровыми знаками. Даже комплексные числа можно было бы обозначить как $a\dot{b}$ вместо традиционного $a + bi$ (точка над b означает мнимое число - это точка от i).

6. Данная систематика привнесла принципиально иной тип чисел: ранговые числа $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$..., над которыми мы умеем выполнять лишь операции следования. Вопрос о других операциях над ними и о нецелых ранговых числах остаётся открытым. Зато возможно ввести понятие о ранговой переменной Р и попытаться построить её анализ; можно говорить также о решении ранговых уравнений, если Р окажется неизвестным. Помимо алгебры и анализа можно говорить и о прогрессе в общей алгебре: наряду с кольцами, полями, телами и другими числовыми областями, где выполняются операции двух рангов ($\underline{3}$ и $\underline{4}$).можно говорить и об областях, где выполняются операции любого числа рангов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dingle H. Science at the crossroads, L., 1972 .
2. Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. М., 1971.
3. Курант Р. Математика в современном мире.-Сб."Математика в современном мире", М., 1967.

4. Дейвис Ф. Арифметика.- Сб."Математика в современном мире". М., 1967.
5. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. М., 1939.
6. Феферман С. Числовые системы .Основания алгебры и анализа. М.,1971.
7. Зубов В.П. Развитие атомистических представлений до начала XIX в.М.,1965.
8. Ганкель Г.Теория комплексных числовых систем. Казань, 1912.
9. Бунин В. А. Сверхстепень как новое математическое действие для описания быстропеременных физических процессов.- Сб."Тезисы докладов, прочитанных на итоговых заседаниях секции физики 19-22 июня 1967 г. Математическая физика. Электродинамика. История физики". МОИП-МГИ, М. ,1967.