С.Л. Василенко

"Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 4

Равнобедренные треугольники продолжают удивлять и радовать своими проявлениями в разных геометрических задачах. В основе ряда экстремальных характеристик лежит константа золотого сечения.

Равенство – удел математики.

Равенство относительно, ибо неразрывно связано с различием.

Равенство абстрактно, как плод упрощения-идеализации действительности.

Два круга равны по форме. Могут иметь одинаковый цвет, но разные размеры.

Абсолютных равенств нет. Есть только некоторое подобие по отдельным качественным и/или количественным характеристикам.

Примеры рядом. Достаточно посмотреть вокруг. В природе нет никакого равенства. Всегда кто-то быстрее бегает, выше летает, дальше прыгает, а хитрый всех обманывает: и большого, и быстрого.

Поэтому во многих областях современной математики (матрицы, сети, теория чисел, хаотические системы и др.) ученые всё чаще заменяют равенство более свободным понятием эквивалентности. Математические отношения строятся не по наборам объектов – множествам, а на основе более универсальных групп – категорий, которые более информативны и отражают больше допустимых отношений, чем равенство.

Относительная свобода, раскрепощение и уход от догматики, с её осознанно-слепой верой в аксиомы и постулаты без доказательств, позволяют выйти на новые рубежи науки.

Именно за подобный прорыв в области математики Dzheykob Lur'ye из Института перспективных исследований (Принстон, США) в 2014 году был удостоен премии 3 млн. $.

Равенство во все времена становилось предметом критического осмысления.

Абсолютное отсутствие различий, равенство означает смерть (индийский философ Вивекананда). Ваше равенство – обман и ложь... (С.Есенин).

Никакая сила на земле не сделает равенство фактом (Оноре де Бальзак).

Что важнее и дороже: равенство или свобода? – Четкого и однозначного ответа нет.

Насколько равно целое число 1 трансцендентному числу π^0? – Вопрос риторический и требует специальных оговорок. Их равенство следует понимать как равенство собственно действительного и другого действительного числа, соответствующего целому – 1.

Так или иначе, но сначала мы находим подобие, а уже потом, через пропорциональность, отмечаем знаком равенства те или иные формализованные признаки.

Что первично в равнобедренном треугольнике, равенство боковых сторон или равенство углов при основании? – Исходя из определения, стороны-бедра с их описанием в метрическом пространстве.

Но вспомним Аристотеля: если всякому равнобедренному треугольнику присуще иметь равные углы, то это присуще ему не потому, что он равнобедренный, а потому что он треугольник. Треугольник (!), а не трехсторонник проективной геометрии.

К слову, при наблюдении предметов вокруг себя мы подсознательно используем угловые ориентиры и единицы измерения, поскольку находимся в центре множества концентрических окружностей. Так что первично не яйцо и не курица, а цыпленок, имя которому ... динозавр или двуногий теропод.

Данная тема неисчерпаема. Мы же продолжим начатое исследование [1]... The work we started out to do. Полагая равенство в пока ещё привычном традиционном разумении, "привитым" в школе.

Три круга в квадрате.

Три окружности с фиксированными радиусами r_1, r_2, r_3 касаются сторон и двух линий в квадрате (рис. 1). Найти сторону (*side*) квадрата s и другие характеристики.

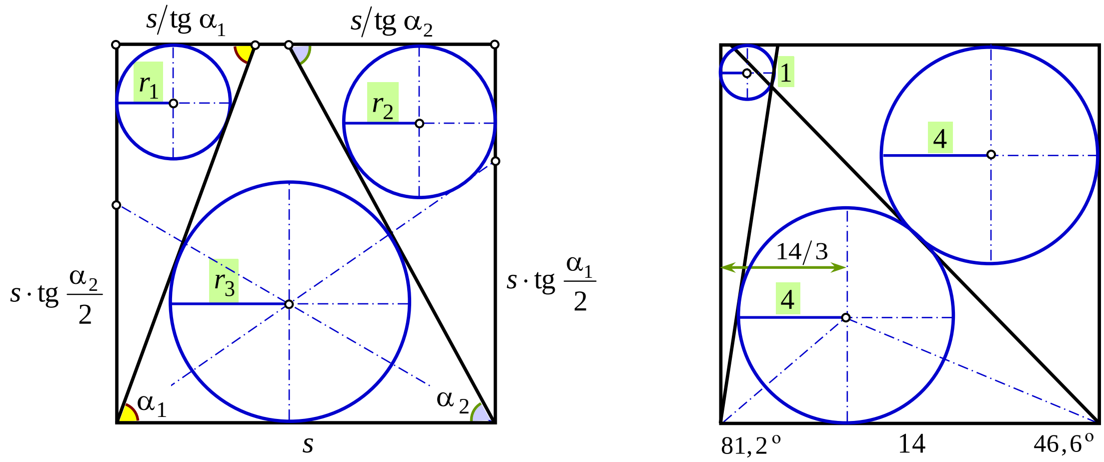


Рис. 1. Три окружности касаются сторон и двух линий в квадрате:
справа приведено минимальное целочисленное решение (r_1, r_2, r_3, s)

Обозначим углы наклона α_1, α_2 двух касательных линий.

Выразим сторону квадрата в левом (i = 1) и правом (i = 2) треугольниках через радиусы вписанных окружностей:

$$s = \frac{r_i}{\text{tg}\left(\frac{90^\circ - \alpha_i}{2}\right)} + \frac{r_i}{\text{tg}\left(\frac{90^\circ}{2}\right)} = r_i \cdot \frac{1+\text{tg}\,(\alpha_i/2)}{1-\text{tg}\,(\alpha_i/2)} + r_i = \frac{2r_i}{1-\text{tg}\,(\alpha_i/2)} \;\rightarrow\; \text{tg}\,(\alpha_i/2) = \frac{s-2r_i}{s}.$$

Аналогично для среднего треугольника, который может быть усечен сверху:

$$s = \frac{r_3}{\text{tg}\,(\alpha_1/2)} + \frac{r_3}{\text{tg}\,(\alpha_2/2)} = r_3\left(\frac{s}{s-2r_1} + \frac{s}{s-2r_2}\right).$$

В результате приходим к квадратному уравнению

$$s^2 - 2(r_1+r_2+r_3)\cdot s + 4r_1r_2 + 2r_3(r_1+r_2) = 0;$$

$$s = (r_1+r_2+r_3) + \sqrt{(r_2-r_1)^2 + r_3^2}\,.$$

Второй корень уравнения отбрасывается, поскольку с такой стороной окружности не умещаются в квадрате.

Углы наклона касательных $\alpha_i = 2 \cdot \text{arctg}\,(1 - 2r_i/s)$.

Примем за начало координат нижний левый угол квадрата.

Уравнения касательных $y_1 = \text{tg}\,\alpha_1 \cdot x,\quad y_2 = -\text{tg}\,\alpha_2 \cdot (x - s).$

Координаты центров окружностей: $1\_(r_1, s - r_1)$; $2\_(s - r_2, s - r_2)$; $3\_(x_3, r_3)$;

где x_3 – точка пересечения биссектрис углов α_1, α_2:

$$y_1' = \text{tg}\,(\alpha_1/2)\cdot x = y_2' = -\,\text{tg}(\alpha_2/2)\cdot(x - s) \;\rightarrow\; x = s \cdot \frac{\text{tg}(\alpha_2/2)}{\text{tg}(\alpha_1/2) + \text{tg}(\alpha_2/2)}.$$

Сочетания всевозможных радиусов дают самые разнообразные формы.

Согласно формуле, если значения радиусов выражаются целыми числами, а величины $r_2 - r_1$ и r_3 являются членами пифагоровых троек, то сторона квадрата s – целое число.

Минимальное целочисленное решение следует из простейшей пифагоровой тройки $(3, 4, 5)$: $(r_1, r_2, r_3) = (1, 4, 4)$; $s = 9 + 5 = 14$. Другие варианты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Примеры целочисленных решений задачи о трех кругах в квадрате на основе пифагоровых троек

№ п/п	Пифагоровы тройки			Радиусы			Сторона	Абсцисса	Углы, град.	
	a	***b***	***c***	r_1	r_2	r_3	***s***	x_3	α_1	α_2
1	3	4	5	1	4	4	14	14/3	81,2	46,6
2*	5	12	13	1	6	12	32	64/5	86,3	64,0
3				5	10	12	40	16	73,7	53,1
4	8	15	17	4	12	15	48	18	79,6	53,1
5	7	24	25	7	14	24	70	30	77,3	61,9

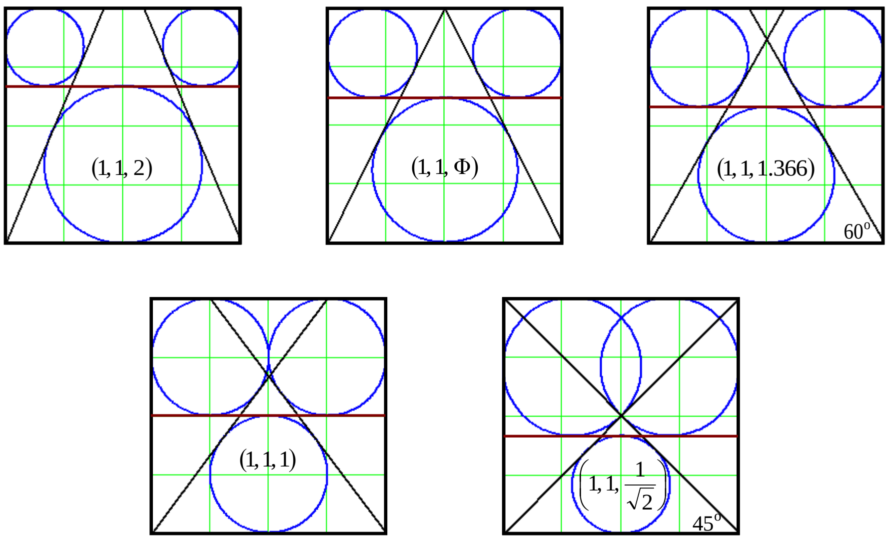
Примечание: * – частный пример рассмотрен в Geometry puzzles 18, youtube.com/watch?v=TAkxgtXHmnM.

Равные радиусы и золотая модель. Положим $r_1 = r_2 = r$. Тогда касательные линии образуют равнобедренный треугольник или равнобочную трапецию. Все круги имеют также общую горизонтальную касательную.

Сторона квадрата $s = 2(r + r_3)$, углы наклона касательных одинаковы и равны

$$\alpha = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{r_3}{r + r_3} = 2 \cdot \operatorname{arctg} z .$$

Точка пересечения касательных находится на оси симметрии квадрата $x = s/2$.



Точка совпадает с верхней стороной, если $y_1 = y_2 = s$ или

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot x = s \quad \to \quad \operatorname{tg} \alpha = 2 \quad \to \quad \operatorname{tg}(2 \cdot \operatorname{arctg} z) = 2 .$$

Используя формулу двойного угла $\operatorname{tg} 2\beta = 2\operatorname{tg} \beta / (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)$, получаем

$$\frac{2z}{1 - z^2} = 2 \quad \to \quad z^2 + z - 1 = 0, \quad z = \frac{r_3}{r + r_3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \phi .$$

Отсюда отношение радиусов равно константе золотого сечения $\frac{r_3}{r} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

То есть золотое сечение минимизирует расстояние от вершины равнобедренного треугольника до верхней стороны квадрата. Другими словами, высота равнобедренного треугольника равна его основанию.

Некоторые характерные примеры (табл. 2):

$r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = \Phi$. Точка пересечения наклонных (вершина равнобедренного треугольника) совпадает с верхней стороной квадрата, $S' = \frac{\pi \cdot (5-7\phi)}{4} \approx 0{,}529$. Высота треугольника равна его основанию – стороне квадрата *s*. Если s = 1, то полупериметр равнобедренного треугольника рамен константе золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$;

$r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = (1+\sqrt{3})/2$. – корень квадратного уравнения $x^2 - x - 0{,}5 = 0$. Равносторонний треугольник, $\alpha = 60^{\circ}$;

$r_1 = r_2 = r_3$. Два верхних круга касаются друг друга. Наибольшая относительная площадь кругов $S' = \pi \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_2^2}{s^2} = \frac{3\pi}{16} \approx 0{,}589$.

прямоугольный равнобедренный треугольник, $\alpha = 45^{\circ}$.

Таблица 2

Характерные значения параметров в задаче о трех кругах в квадрате

	r_1	r_2	r_3	*s*	*S′*	α	tg α	tg α/2
1	1	1	2	6	0,524	67,38	2,4	0,667
2	1	1	**Φ**	5,236	0,529	63,44	2	0,618
3	1	1	1,366	4,732	0,542	**60**	1,732	0,577
4	**1**	**1**	**1**	4	0,589	53,13	1,333	0,5
5	1	1	0,707	3,414	–	**45**	1	0,414

1) Целочисленные углы в градусах.

В равнобедренном треугольнике из вершины проведен отрезок, равный основанию и образующий с боковыми сторонами углы α_1, α_2 (рис. 2). Найти угол θ.

Частный случай $\alpha_1 = 10^{\circ}, \alpha_2 = 30^{\circ}$ рассмотрен на видео (youtube.com/watch?v=2sqHK_1Ah8U).

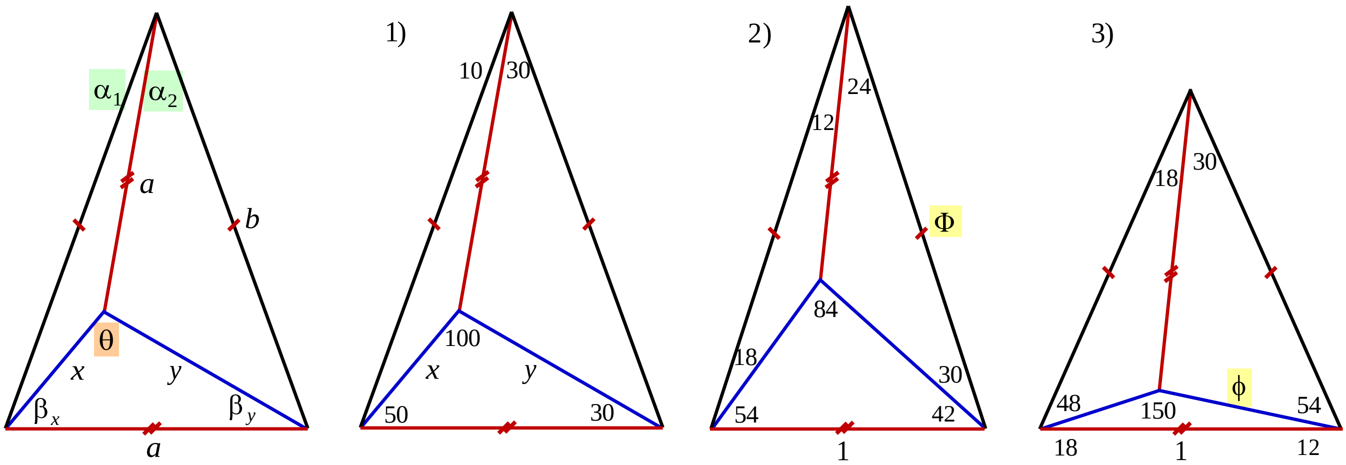


Рис. 2. Целочисленные углы (град.) в равнобедренном треугольнике:
из вершины проведен отрезок, равный основанию *a*

Без потери общности примем основание треугольника равным $a = 1$.

Угол при вершине $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, при основании $\beta = (\pi - \alpha)/2$, боковая сторона $b = \dfrac{a}{2\sin\,\alpha/2}$, высота $h = \dfrac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\beta$. Угол θ определяется по теореме косинусов

$$\theta = \arccos\frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy}, \qquad x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha_1}, \qquad y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha_2}.$$

Отрезки x, y наклонены под углами $\beta_x = \arccos\dfrac{a^2 + x^2 - y^2}{2ax}$, $\beta_y = \arccos\dfrac{a^2 + y^2 - x^2}{2ay}$.

Высота проведенного отрезка $h_a = a \cdot \cos\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$.

Машинные эксперименты показали, что имеется 40 решений с целочисленными углами в градусах $(\alpha_1, \alpha_2, \theta, \beta_x, \beta_y)$. Практически для всех узловая точка при угле θ выходит за пределы треугольника ниже его основания (рис. 3), то есть $h_a > h$.

И только в трех вариантах узловая точка находится внутри равнобедренного треугольника (табл. 3), причем два из них соотносятся с золотым сечением $\Phi = \phi^{-1}$.

Воистину замечательное проявление золотого сечения в равнобедренном треугольнике.

Таблица 3

Целочисленные углы в равнобедренном треугольнике

№ п/п	α_1	α_2	β	θ	β_x	β_y	a	b	x	Y	h	h_a
1	10	30	70	100	50	30	1	1,462	0,508	0,778	1,374	0,985
2	12	24	72	84	54	42	1	Φ	0,673	0,813	1,539	0,995
3	18	30	66	150	18	12	1	1,229	0,416	ϕ	1,123	0,995

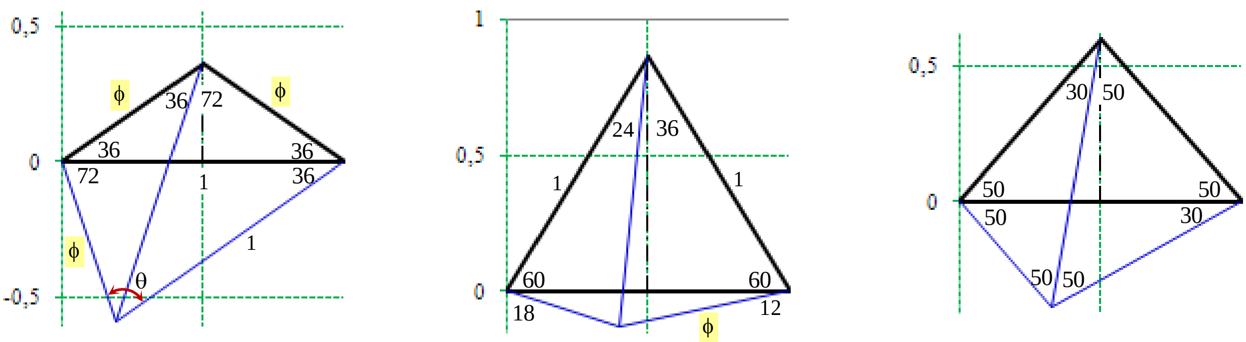


Рис. 3. Некоторые примеры целочисленных углов в градусах,
когда узловая точка при угле θ расположена ниже основания равнобедренного треугольника

Геометрическое решение-построение. На отрезке *AO*, как на основании, восстанавливаем по обе стороны исходный равнобедренный треугольник (рис. 4).

В результате образуется ромб *ADOE* с углами α и 2β. Вершины ромба соединим с концами основания *CB*. Для нахождения угла θ надо определить углы γ и δ.

Вспомогательные углы:

$$t_1 = \beta - \alpha_1 = 90 - \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \qquad s_1 = 90 - \frac{t_1}{2} - \alpha = 45 - \frac{\alpha_1 + 3\alpha_2}{4} = \frac{t_2}{2};$$

$$t_2 = \beta - \alpha_2 = 90 - \frac{\alpha_1 + 3\alpha_2}{2}, \quad s_2 = 90 - \frac{t_2}{2} - \alpha = 45 - \frac{3\alpha_1 + \alpha_2}{4} = \frac{t_1}{2}.$$

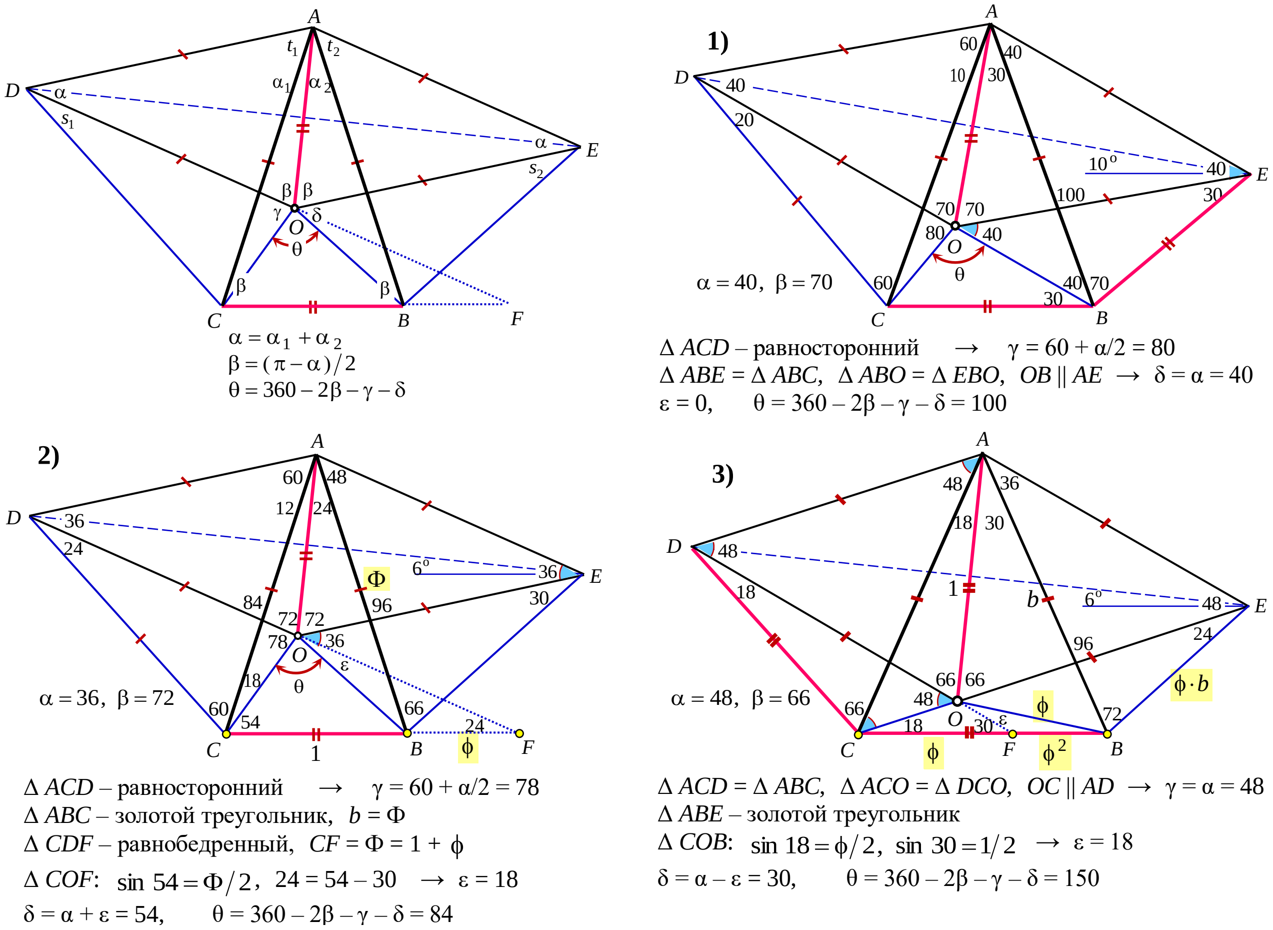


Рис. 4. Геометрическое определение угла θ в равнобедренном треугольнике, из вершины которого проведен отрезок, равный основанию и образующий с боковыми сторонами углы α_1, α_2

Целочисленные углы образуются при определенных условиях:

1) Δ *ACD* равносторонний $\rightarrow$ $\gamma = 60 + \alpha/2$;
   Δ *ABE* равен исходному, *OB* || *AE* $\rightarrow$ $\delta = \alpha$;

2) Δ *ACD* – равносторонний $\rightarrow$ $\gamma = 60 + \alpha/2$;

   Δ *ABC* – равнобедренный треугольник Робинсона с углом при вершине $\alpha = 36^\circ$, часто называемый золотым, отношение боковой стороны к основанию равно константе золотого сечения Φ;

   Δ *CDF* – равнобедренный, *CF* = $\Phi = 1 + \phi$, $\sin 54^\circ = \Phi/2$.

3) Δ *ACD* равен исходному, *DA* || *CO* $\rightarrow$ $\gamma = \alpha$;

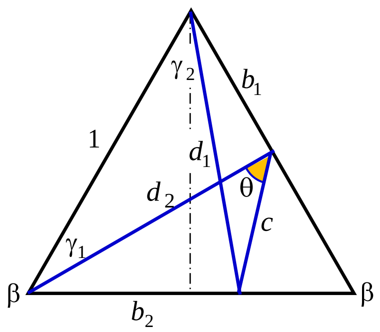
   Δ *ABE* – золотой треугольник, $\sin 18^\circ = \phi/2$, $\sin 30^\circ = 1/2$.

2) Целочисленные углы в градусах.

В работе [1, ч. 3] проанализированы взаимосвязи параметров в равнобедренном треугольнике. В частности, рассмотрены целочисленные углы для произвольного "отрезка-перемычки" c между боковыми сторонами треугольника с фиксированным углом при основании β. Видоизменим условия.

<u>Задача.</u> В равнобедренном треугольнике с фиксированным углом при основании β проводится произвольный "отрезок-перемычка" c между боковой стороной и основанием, в результате чего образуется выпуклый четырехугольник со сторонами b_1, b_2, а также диагоналями d_1, d_2 с углами наклона γ_1, γ_2.

По заданным углам β, γ_1, γ_2 найти угол θ, в том числе целочисленные решения в градусах. Знание угла θ позволяет определить углы четырехугольника со стороной c:



Полагая длину боковой стороны равной 1 и учитывая равенство $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, по теореме синусов находим стороны и диагонали четырехугольника:

$$b_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\sin(\alpha+\gamma_1)}, \quad b_2 = \frac{\sin\gamma_2}{\sin(\beta+\gamma_2)};$$

$$d_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma_2)}, \quad d_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma_1)}.$$

По теореме косинусов определяется угол:

$$\theta = \arccos\left(\frac{c^2 + d_2^2 - b_2^2}{2\cdot c\cdot d_2}\right), \quad c^2 = b_1^2 + d_1^2 - 2\cdot b_1\cdot d_1\cdot\cos(\alpha - \gamma_2).$$

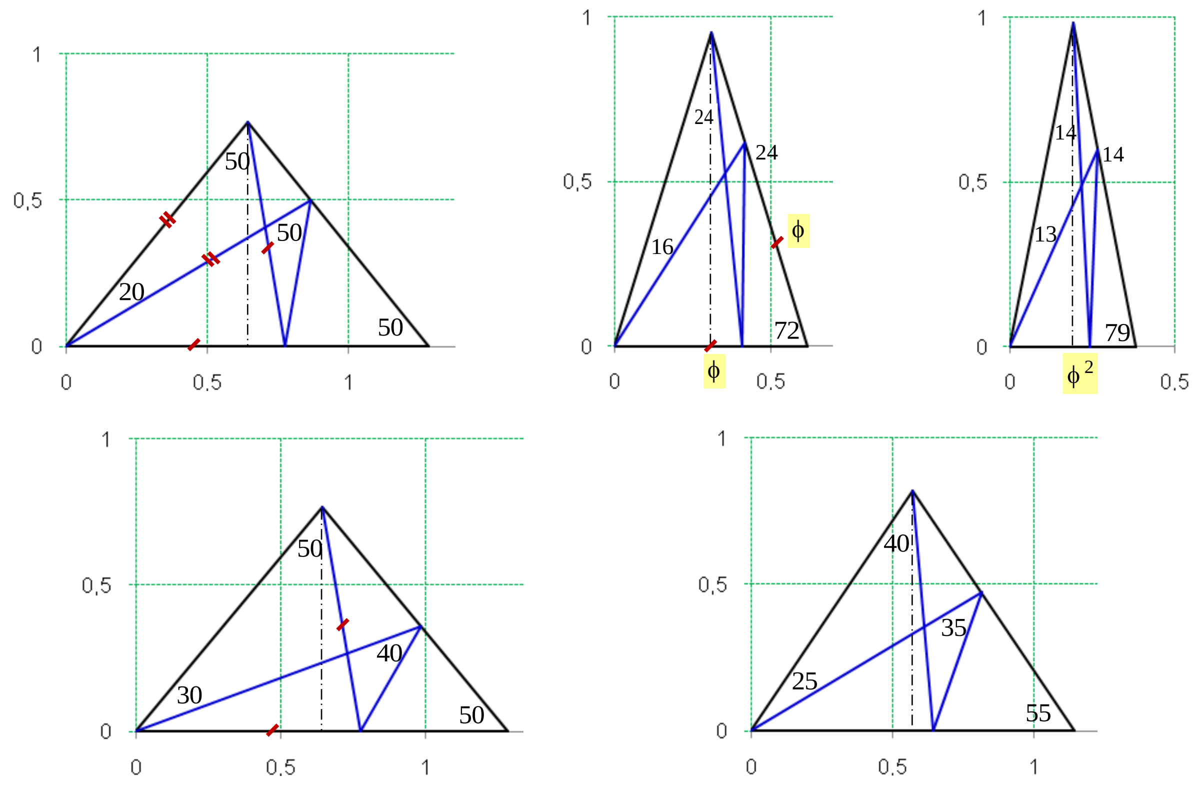


Рис. 5. Примеры целочисленных угловых решений для перемычки в равнобедренном треугольнике, включая золотоносные отношения основания треугольника к его боковой стороне $b = 1$

Углы вычисляются машинным перебором целых значений в интервалах:

$$0 < \gamma_2 < \gamma_1 < \beta < 90.$$

Геометрическое ограничение: $d_1 < 1$. Иначе угол с вершиной θ выходит за пределы треугольника.

Целочисленные решения существуют для любого угла при основании равнобедренного треугольника 40 < β < 80. При этом углы γ_1, γ_1, практически полностью охватывают широкий диапазон:

$$\theta = \gamma_2 = 80 - \beta + \gamma_1\,, \quad \gamma_1 = \overline{1, m}, \quad m = \min\{2\beta - 80, 99 - \beta\}\,.$$

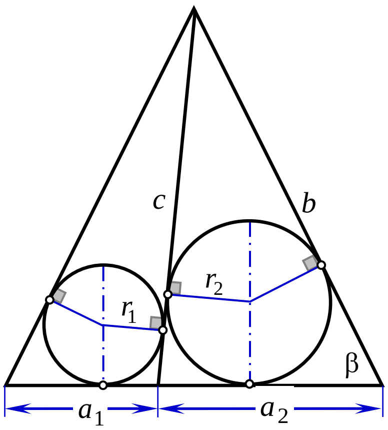
Значение 2β – 80 = 100 – α берется для угла $\beta < 60^{\circ}$, значение 99 – β для угла $\beta > 60^{\circ}$.

Если $\gamma_1 = 2\beta - 80$, то равны три угла $\theta = \beta = \gamma_2$ и отрезки $d_1 = b_2$.

Некоторые примеры представлены на рис. 5, включая золотоносные отношения основания треугольника к его боковой стороне.

Кроме этого, отдельно выделяются ещё два целочисленных решения $\theta \neq \gamma_1$.

Чевиана в равнобедренном треугольнике.



В равнобедренном треугольнике с углом при основании β проведенная из вершины чевиана делит его на два треугольника с основаниями $a_1 + a_2 = a$, в которые вписаны окружности.

Можно найти радиусы r_1 и r_2 этих окружностей или, наоборот, по заданным радиусам определить отношение оснований $a_1/a_2 = \delta$; $a = a_1 + a_2 = a_2(\delta + 1) = a_1\left(\dfrac{\delta+1}{\delta}\right)$.

Для исключения симметричных решений положим $r_1 < r_2$. Соответственно $a_1 < a_2$. Обозначим длины:

b – боковая сторона, c – чевиана (cevian).

Сторона треугольника $b = \dfrac{a}{2\cos\beta}$, высота $h = \dfrac{a \cdot \operatorname{tg}\beta}{2}$, чевиана

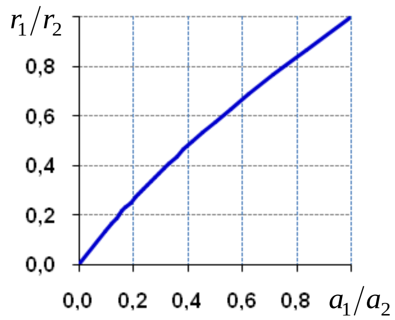
$$c^2 = b^2 + a_1^2 - 2ba_1\cos\beta = b^2 + a_1^2 - a_1 a = b^2 - a_1 a_2\,.$$

Радиус вписанной окружности равен площади треугольника, деленной на его полупериметр (n = 1, 2):

$$r_n = \frac{S_n}{p_n} = \frac{a_n h}{a_n + b + c}\,.$$

Отношение радиусов:

$$\delta = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2 + b + \sqrt{b^2 - a_1 a_2}}{a_1 + b + \sqrt{b^2 - a_1 a_2}} = \frac{f(x) + 2\cos\beta}{f(x)/x + 2\cos\beta}\,,$$



где $f(x) = 1 + x + \sqrt{(1+x)^2 - 4x \cdot \cos\beta}$, $x = a_1/a_2$.

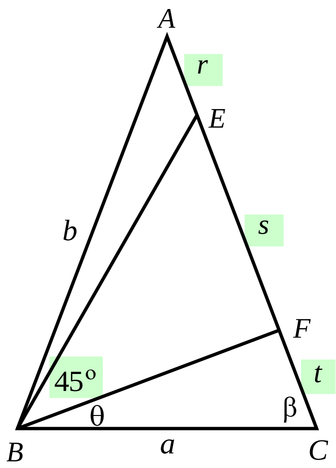
Обратная задача нахождения $x = a_1/a_2$ через известное отношение $\delta = r_1/r_2$ сводится к решению квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$,

$$p = \frac{2\delta \cdot (k-1) - k \cdot (1-\delta)^2}{k - \delta}, \quad q = \frac{\delta - \delta^2 k}{k - \delta}, \quad k = 1 + \cos\beta\,.$$

Например, в равностороннем треугольнике $\cos\beta = \cos 60^\circ = 0{,}5;\ k = 3/2$.
Если принять $\delta = 1/k = 2/3$, то $q = 0$ и $x = p = 3/5$.
Особых золотоносных решений не наблюдается. Не каждый металл – золото...

Рациональные решения в равнобедренном треугольнике.

Боковая сторона равнобедренного треугольника разбита на три отрезка $b = r + s + t$, и угол $\gamma = 45^\circ$. Найти угол при основании $\operatorname{tg}\beta$.



Заметим, что угол в 45 градусов выбран намеренно, с целью упрощения последующих выкладок путем сокращения на равные величины $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. Используется также формула приведения для синуса $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

1) Δ *ABC*, теорема косинусов:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{2b} \ \rightarrow\ a = 2b\cdot\cos\beta .$$

2) Δ *BFC*, теорема синусов:

$$\frac{\sin\theta}{t} = \frac{\sin(\pi - \theta - \beta)}{a} = \frac{\sin(\theta + \beta)}{2b\cdot\cos\beta};$$

$$2b\cdot\sin\theta\cdot\cos\beta = t\cdot(\sin\theta\cdot\cos\beta + \cos\theta\cdot\sin\beta);$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{t}{2b - t}\cdot\operatorname{tg}\beta .$$

3) Δ *BEC*, теорема синусов:

$$\frac{\sin(45 + \theta)}{s + t} = \frac{\sin(45 + \theta + \beta)}{a};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\theta + \cos\theta}{s + t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin(\theta + \beta) + \cos(\theta + \beta)}{2b\cdot\cos\beta};$$

$$2b\cdot\cos\beta\cdot\sin\theta + 2b\cdot\cos\beta\cdot\cos\theta = (s + t)(\sin\theta\cdot\cos\beta + \cos\theta\cdot\sin\beta + \cos\theta\cdot\cos\beta - \sin\theta\cdot\sin\beta);$$

$$(2b - s - t)(\cos\beta\cdot\sin\theta + \cos\beta\cdot\cos\theta) = (s + t)(\cos\theta\cdot\sin\beta - \sin\theta\cdot\sin\beta);$$

$$(2b - s - t)(\operatorname{tg}\theta + 1) = (s + t)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\beta).$$

Подставляя $\operatorname{tg}\theta$, получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}^2\beta - \frac{2bs}{t(s + t)}\cdot\operatorname{tg}\beta + \frac{(2b - s - t)(2b - t)}{t(s + t)} = 0;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b\cdot s \pm \sqrt{b^2 s^2 - t(s + t)(2b - s - t)(2b - t)}}{t(s + t)} .$$

В общем виде тангенс угла β равен отношению высоты к половине основания. Можно посмотреть его рациональные значения.

Частный случай: $r = t = 1$.

$$\mathrm{tg}^2\beta - \frac{s(4t+2s)}{t(s+t)}\cdot \mathrm{tg}\,\beta + \frac{(3t+s)(3t+2s)}{t(s+t)} = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{s(2t+s)\pm\sqrt{s^2(2t+s)^2 - t(3t+s)(3t+2s)(s+t)}}{t(s+t)};$$

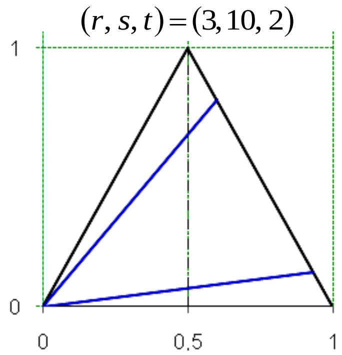
$$s^4 + 2ts^3 - 7t^2s^2 - 18t^3s - 9t^4 > 0;$$

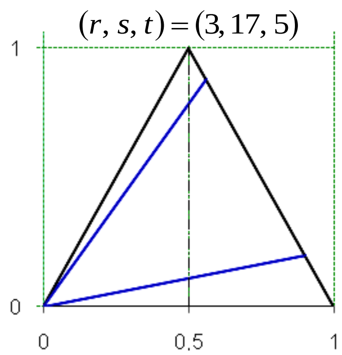
$$t = 1 \quad \rightarrow \quad s \geq 2{,}90627969.$$

Таблица 4

Примеры целых отрезков, дающих рациональные значения тангенса угла

Отрезки боковой стороны			**tg β**		Отрезки боковой стороны			**tg β**	
r	***s***	***t***			***r***	***s***	***t***		
1	3	1	9/2	3	3	26	10	17/6	14/5
1	10	2	28/3	3/2	3	41	16	3	91/38
1	12	4	9/2	15/8	4	29	11	3	14/5
3	10	2	21/2	2	4	35	13	7/2	7/3
3	17	5	63/11	2	5	39	11	6	9/5





Линейные параметры приведены к a = 1, полупериметр треугольника равен константе золотого сечения Φ

Параметрические модели в дельтоиде.

Дельтоид – четырехугольник с двумя парами равных смежных сторон. Состоит из двух равнобедренных треугольников с общим одинаковым основанием. В частности, нашел проявление в задаче замощения – покрытия плоскости плитками без пропусков и наложения плиток друг на друга в мозаике Пенроуза [2], которая строится из плиток двух типов: выпуклого дельтоида – "змеи" и вогнутого дельтоида – "дротика".

Формы соединяются с образованием ромба, но важнее их стыковка без участия ромба.

Ось симметрии выпуклого дельтоида с углами 72°, 72°, 72° и 144° разбивает его на два равных равнобедренных остроугольных золотых треугольника с углами 36°, 72° и 72°.

Ось симметрии вогнутого дельтоида с углами 36°, 72°, 36° и 216° разбивает его на два равных равнобедренных тупоугольных золотых треугольника с углами 36°, 36° и 108°.

Рассмотрим одну задачу с дельтоидом и проследим проявление в нем двух моделей: две трети и золотой.

В дельтоид вписана окружность радиусом r_1, а вокруг равнобедренного треугольника описана окружность радиусом $r_2 > r_1$, при этом окружности касаются друг друга внутренним образом (рис. 6-а). Их диаметры соответственно равны $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$.

Отметим, что середина отрезка между точками касания боковых сторон является центром вписанной окружности равнобедренного треугольника.

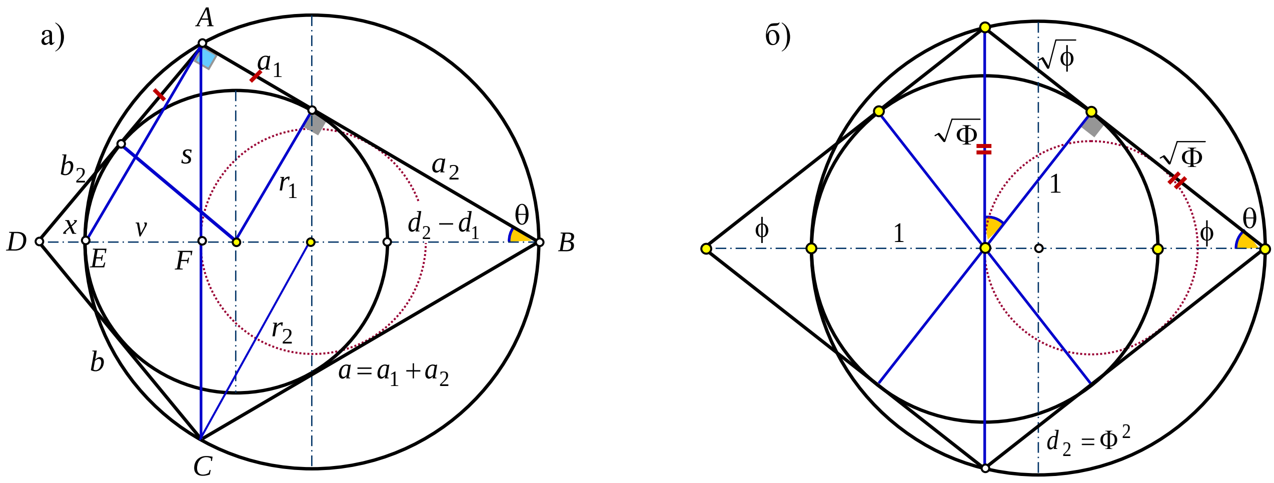


Рис. 6. Дельтоид – два равнобедренных треугольника с общим основанием:
а) – модель "две трети" $r_1/r_2=2/3$: $\theta=30^o$, $a=2s$, $v=r_2/2$;
б) – золотая модель: $r_1/r_2=2/\Phi^2$: $v=r_1$, $a=b$ – равнобедренный треугольник;
ромб состоит из двух пар прямоугольных золотых треугольников Кеплера

Для касательной и секущей к окружности, которые проведены из одной точки, расстояние от этой точки до точки касания – среднее геометрическое длины секущей и длины её внешней части:

$$a_2=\sqrt{d_2\cdot(d_2-d_1)},\ b_2=\sqrt{x\cdot(x+d_1)}.$$

Пропорция для ΔABE:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{r_1}{d_2-r_1}\quad\to\quad a_1=\frac{r_1a_2}{d_2-r_1}=\frac{r_1\sqrt{d_2\cdot(d_2-d_1)}}{d_2-r_1}.$$

Параметры через угол θ:

$$\cos\theta=\frac{a_2}{d_2-r_1},\qquad s=AF=a\sin\theta=a\sqrt{1-\cos^2\theta};$$

$$v=EF=d_2-FC=d_2-a\cos\theta.$$

Теорема Пифагора для ΔADF:

$$s^2+(x+v)^2=(b_2+a_1)^2\quad\leftarrow\quad b_2=\sqrt{x\cdot(x+d_1)};$$
$$s^2+x^2+2vx+v^2=x\cdot(x+d_1)+2a_1\sqrt{x\cdot(x+d_1)}+a_1^2;$$
$$(2v-d_1)x+\left(v^2+s^2-a_1^2\right)=2a_1\sqrt{x\cdot(x+d_1)}.$$

После возведения в квадрат получается квадратное уравнение:

$$Ax^2+Bx-C=0,\quad x=\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A},$$

$$A=4a_1^2-(d_1-2v)^2,\ B=2(d_1-2v)\left(v^2+s^2-a_1^2\right)+4d_1a_1^2,\ C=\left(v^2+s^2-a_1^2\right)^2.$$

Модель "две трети" [3]. На видео (youtube.com/watch?v=3L58OVII9C0) рассмотрен частный пример дельтоида $r_1=2$, $r_2=3$ с отношением радиусов "две трети" (рис. 6-а).

Отличительной особенностью является угол $\theta = 30^{o}$, то есть один из составных равнобедренных треугольников ΔABC – равносторонний ($a = 2s$). Кроме того, $a_2 = 2a_1, v = r_2/2$. Центр окружности r_2 лежит на линии, соединяющей точки касания окружности r_1 со сторонами треугольника ΔABC. При этом второй равнобедренный треугольник имеет слабо выразительные параметры. В частности, величина x = 6/11, как корень квадратного уравнения $11x^2 + 60x - 36 = 0$.

Золотая модель. Без потери общности примем $r_1 = 1$ и найдем условия, при которых вертикальная диагональ дельтоида *DB* проходит через центр вписанной окружности, то есть $v = r_1 = 1$.

Запишем цепочки равенств:

$$v = d_2 - a\cos\theta = d_2 - \left(\frac{r_1 a_2}{d_2 - r_1} + a_2\right)\frac{a_2}{d_2 - r_1} = d_2 - \left(\frac{r_1}{d_2 - r_1} + 1\right)\frac{d_2 \cdot (d_2 - d_1)}{d_2 - r_1} =$$

$$= d_2 - \frac{d_2^2 \cdot (d_2 - d_1)}{(d_2 - r_1)^2} = 1 \quad \to \quad d_2{}^2 - 3d_2 + 1 = 0, \quad \underline{d_2 = \Phi^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > d_1;$$

$$d_1 = 2, d_2 = \Phi^2 = 1 + \Phi, \; d_2 - d_1 = \phi, \; a_2 = \sqrt{\Phi^2 \cdot \phi} = \sqrt{\Phi}, \; a_1 = \frac{1 \cdot \sqrt{\Phi}}{\Phi^2 - 1} = \sqrt{\phi};$$

$$a = a_1 + a_2 = \sqrt{\phi} + \sqrt{\Phi};$$

$$\cos\theta = a_1 = \sqrt{\phi}, \quad s = \left(\sqrt{\phi} + \sqrt{\Phi}\right)\sqrt{1-\phi} = \sqrt{\Phi} = a_2.$$

Равенство величин $d_1 = 2v$ образует квадратное уравнение относительно $x = DE$:

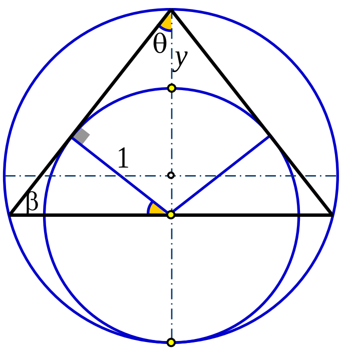
$$4\phi \cdot x^2 + 8\phi \cdot x - 4 = 0 \text{ или } x^2 + 2x - \Phi = 0 \quad \to \quad x = -1 + \sqrt{1+\Phi} = \phi.$$

Таким образом, дельтоид превращается в ромб, который в свою очередь разбивается на две пары одинаковых дельтоидов, каждый из которых состоит из двух прямоугольных треугольников Кеплера со сторонами $(1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$ и $(1, \sqrt{\Phi}, \Phi) \cdot \sqrt{\phi} = (\sqrt{\phi}, 1, \sqrt{\Phi})$.

Сторона ромба $a = \sqrt{\phi} + \sqrt{\Phi}$, его диагонали $D_1 = 2\sqrt{\Phi}$, $D_2 = 2\Phi$, отношение диагоналей $\sqrt{\Phi}$.

К слову, понятие ромба встречается среди определений в «Началах» Евклида. При этом отсутствует изучение свойств ромба, хотя в этой геометрической фигуре можно обнаружить интересные закономерности.

Например [4], из четырех золотых α-треугольников (с геометрической прогрессией углов) можно построить золотой α-ромб с углами $180^{o}\left(\phi^2, \; \phi\right) = \left(68.75^{o}, \; 111.25^{o}\right)$, отношение которых равно Ф – большой константе золотого сечения.



В работе [5] рассмотрены разные варианты золотоносных эллипсов, напрямую связанных с ромбами, которые в свою очередь состоят из двух одинаковых равнобедренных треугольников.

Обратная задача. Окружность $r_1 = 1$ касается боковых сторон равнобедренного треугольника – части дельтоида.

Найти условия, при которых она касается внутренним образом окружности r_2, описанной вокруг треугольника.

Пусть *y* – отрезок между диаметрами двух окружностей.

Высота треугольника $h = y + 1$.

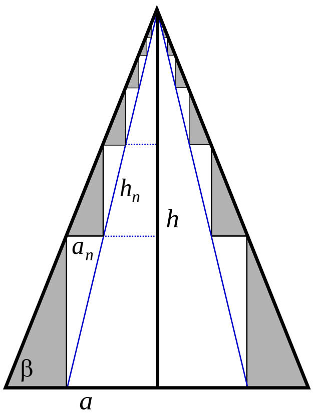
Радиус описанной окружности $r_2 = (y+2)/2$.

В равнобедренном треугольнике отношение высоты и радиуса описанной окружности равно $h/r_2 = 2\sin^2\beta = 2\cos^2\theta$. После подстановки получаем

$$2\cdot\frac{y+1}{y+2} = 2\cdot\frac{1}{y(y+2)} \quad\to\quad y^2 + y - 1 = 0,\quad y = \phi.$$

Таким образом, отношение радиусов составляет $(\phi+2)/2 = \Phi^2/2$. Отношение высоты к половине основания (отношение диагоналей дельтоида) равно $\sqrt{\Phi}$.

Бесконечные последовательности.



Равнобедренный треугольник – удобный объект для исследования и демонстрации геометрических прогрессий, в том числе бесконечных.

Обозначим: h – высота, $2a$ – основание, β – угол при основании, $\delta < 1$ – часть от основания для затененного треугольника.

Высота $h_n = a_n\delta\cdot\operatorname{tg}\beta$, площадь $2S_n = (a_n\delta)^2\cdot\operatorname{tg}\beta$;

$$a_{n+1} = (a_n - a_n\delta)\delta = a_n(1-\delta)\delta;$$

$$2S_{n+1} = (a_n\delta)^2\cdot(1-\delta)^2\cdot\operatorname{tg}\beta = 2S_n\cdot(1-\delta)^2.$$

Отношение площадей – знаменатель убывающей геометрической прогрессии $q = S_{n+1}/S_n = (1-\delta)^2$.

Сумма прогрессии $S = \dfrac{S_1}{1-q} = \dfrac{a^2\delta^2}{1-(1-\delta)^2}\cdot\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\delta}{2-\delta}\cdot\dfrac{ah}{2}$.

Таким образом, затененные треугольники занимают $\lambda = \delta/(2-\delta)$ часть от равнобедренного треугольника.

Например:

- $\delta = 0{,}5$ – деление отрезка a пополам $\to \lambda = 1/3$;
- отсекаем квадрат $h_1 = a(1-\delta) = a\delta\cdot\operatorname{tg}\beta \;\to\; \delta = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\beta},\; \lambda = \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\beta - 1}$.

Золотая модель.

Величина $\delta = \phi^2$ – малая часть отрезка, разделенного золотым сечением.

Тогда $\lambda = \phi^2/(2-\phi^2) = \phi^2/\Phi = \phi^3$.

Независимо от параметров равнобедренного треугольника (его высоты и основания) отсечение прямоугольников по линии золотого сечения дает в сумме ϕ^3 часть от общей площади исходного равнобедренного треугольника.

Дано: высота h, площадь S. Найти h_1.

Половина угла при вершине $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{S + \sqrt{S^2 + 4Sh}}{h^2}$, $h_1 = \dfrac{4h}{3 + \sqrt{1 + 4h^2/S}}$.

Вместо заключения.

В математике равенство – бинарное (двойное) отношение, как сильная разновидность отношений эквивалентности. Знак "=" введен в Европе сравнительно недавно Лейбницем.

С тех пор появилось много новых математических символов эквивалентности на основе равенств, например (с кодами Unicode):

≃ асимптотически равно;	≐ округленно равно;
≚ равноугольный;	≙ равно по определению;
≔ присваивание;	≅ конгруэнтность (геометрическое равенство) и др.

Равенство приобрело дополнительные особенности-нюансы.

Не случайно родились саркастические высказывания:

математика – это не физика, где можно химичить;

все равны, но некоторые ровнее (перифраз Дж. Оруэлла).

Нечто похожее случилось с последней в латинском (английском) алфавите и самой редкой в употреблении буквой Z. В американском "зи" [ziː], в британском – "зед" [zed].

С точки зрения смыслов повышенное внимание к знаку Z вызывает иронию и недоумение. Одни превозносят, другие запрещают. – Наверняка, со временем это представится эмоциональным всплеском-воображением, близким к ребяческой забаве.

Размашистым росчерком Z до сих пор зачеркивают лишние ненужные строки в различных ведомостях, накладных. И что с того?

Стандартное сочетание клавиш на компьютере Ctrl+Z означает отмену, вернуться назад, обратно. Так же как Ctrl+X – вырезать, Ctrl+C – копировать, Ctrl+V – вставить.

В теории поколений У.Штрауса поколение Z (зуммеры, 1997–2012 г.р.) отличается вовлечением с раннего детства в цифровые технологии.

Если это буква, то ассоциация с латинским алфавитом чужда используемой кириллице.

Если визуальная связь со свастикой, то от этого открещиваются.

Тогда что, скрытая фрустрация? – Представляется, что всё же литера, которая прижилась в среде военных вследствие компьютерной латинизации слов "запад, восток" буквами английского алфавита, типа "Zapad, Vostok".

Но могла вмешаться и вездесущая математика: по известным причинам учителя просят реже использовать буквы X и Y. – И никакой конспирологии.

Ищите простые пути-решения.

Quaerite et invenietis ...

Литература:

1. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 1, часть 2, часть 3 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28020, 12.08.2022. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm.

2. Корепин В.Е. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6. – С. 2-6.

3. Василенко С.Л. «Одна или две трети», как простая модель рациональной пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23089, 23.02.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163219.htm.

4. Василенко С.Л., Белянин В.С. Золотая пропорция в системе угловых мер // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22785, 05.12.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163151.htm.

5. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ. 17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

Украина, Харьков