С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 2. Новые свойства квадрата

> Золотое сечение (ЗС) и деление пополам –
> близнецы-братья, – кто более матери-истории
> ценен? Мы говорим – ЗС, подразумеваем
> половинное деление. Мы говорим – деление
> пополам, подразумеваем ЗС.
>
> Перефраз В. Маяковского.

Обычно мы пытаемся, насколько это представляется возможным, свести результаты исследований к несложным моделям, уравнениям и/или алгоритмам, с наглядными формами и трактовками. Типа $E = mc^2$.

Они понятны и доступны в интерпретации.

Например, в рекуррентной последовательности логистического отображения

$$x_{n+1} = c \cdot x_n(1 - x_n)$$

вариабельная постоянная Фейгенбаума c характеризует бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к детерминированному хаосу. Процесс чрезвычайно сложный, можно сказать беспорядочный, хотя описывается достаточно простой моделью.

Золотое сечение и обычное деление пополам (надвое) также можно отнести к тривиальным моделям, за которыми проступает и высвечивается их фундаментальность в природе и математике.

Более того, они связаны между собой, что называется, на "генетическом" уровне.

Так, если в геометрическом построении присутствуют отрезки длиной 1 и 2, то нужно хорошо присмотреться, проявить смекалку, и не мудрено отыскать золотое сечение.

Модель золотого роста на основе квадрата.

В работе [1] развита довольно оригинальная идея по теме золотого сечения. Можно сказать, под "новым" ракурсом. Мы развернули угол зрения, что называется, на 180 градусов.

Вместо привычного деления (анализа), исследована золотоносная проблематика приумножения (синтеза).

Общую направленность в геометрическом аспекте дает построение увеличенного золотоносного отрезка на базе обычного квадрата.

Основание квадрата 1×1 делится пополам и проводится дуга радиусом, заключенным между серединой основания и вершиной квадрата. Всё!

На одной линии образуются три отрезка, объединенных общим равенством 1 + ф = Ф.

Довольно наглядно и очевидно. Число определяется одним поворотом циркуля относительно середины квадрата (см. рис. 1).

Преимущества модели золотого роста.

Данная модель приращений (золотого роста) имеет ряд неоспоримых преимуществ по сравнению с обычным или традиционным делением отрезка.

1) Константа золотого сечения Ф приобретает четкую метрику и содержательный геометрический смысл. Это новый увеличенный отрезок. Или новое увеличенное (подросшее) целое в результате увеличения исходного единичного отрезка на величину приращения ф. В тех же самых единицах, что исходный отрезок 1 и добавка к нему ф.

Другими словами, все величины в равенстве 1 + ф = Ф имеют одинаковую метрику.

Очень важное методологическое расширение!

В традиционной задаче на деление отрезка величина Ф не содержит метрики и определяется, как отношение большей части к меньшей. То есть, проводится только сечение, без геометрического представления величины Ф.

Теперь у нас константа золотого сечения Ф – «новая созидательная единица», образуемая из обычной единицы 1 в золотой пропорции.

2) Имеем *минимальную форму* в записи пропорции по количеству наличия в ней неизвестной величины $(1 + x) : 1 = 1 : x$. – Это верный признак правильности выбранного нами пути решения и осмысления!

3) Имеем *минимальное количество операций* (с помощью циркуля и линейки) для решения геометрической задачи на построение. Задача на золотое увеличение-приращение (приумножение) решается одним поворотом циркуля.

Так поступает и природа. Этот момент является определяющем в синтезе и развитии растений с их вездесущим филлотаксисом. Одним движением поворота, образуя спираль.

Именно формирование, рост, созревание являются главными посылами. Но не пресловутое золотое деление, которое в природе практически не встречается.

4) Можно сформулировать пропорцию в категориях *динамического изменения состояния*: новое так относится к старому, как оно – к приращению.

При этом становится более понятной и отчетливой связь возрастающих чисел Фибоначчи приблизительно в геометрической прогрессии с константой-аттрактором Ф.

Или те же кролики... С их рождением-ростом-созреванием. Но никак не умерщвлением-вырезанием-гибелью.

Допустимая операция в математике, с её расчленением и разбиением, становится мало востребованной аналогией в теории жизни.

5) Если изначально взять за основу задачу деления (целого, отрезка), то она таковой и остается. То есть всё заканчивается анализом.

В задаче на приращение всё обстоит иначе.

В рамках одной проблематики мы можем проводить *одновременно анализ и синтез*.

Дело лишь в определении направления движения-приращения.

В последнем можно лишь изменить ориентацию, и тогда образуется не наращивание, а урезание (деление).

Таким образом, привычное *золотое сечение – модель анализа и разрушения*. Причем более сложная в реализации и построении конструкция.

И наоборот, золотая пропорция – это системный признак живых объектов. Основа модели их роста, развития, внутреннего устройства. Генезис пятого порядка с единым центром вращательной симметрии начинается с материнской клетки и генерирует процесс деления, образующий мягкие эластичные формы, не дающие живому закостенеть.

Продолжим исследование золотоносных свойств на основе квадрата.

Задача о середине отрезка.

Дан квадрат с единичной стороной (рис. 2).

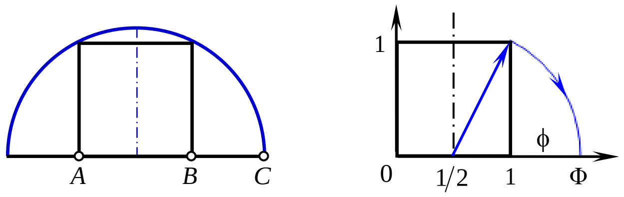
На одной его стороне и продолжении другой отложены равные отрезки $BX = DY = a$.

В обычной постановке [2] требуется доказать, что точка P является серединой соединяющего отрезка XY, то есть $PX = PY$.

Проведем $QX \perp BX$. Диагональ квадрата делит прямой угол пополам, поэтому $QX = BX$. Треугольники $\Delta\, PXQ$, $\Delta\, PYD$ имеют равную сторону и углы (вертикальные и внутренние накрест лежащие), значит, они равны и $PX = PY$. Собственно и всё доказательство.

Красивое решение вытекает из теоремы Менелая (~ 100 г. н.э.) о длинах отрезков для $\Delta\, XYC$ и линии BD: $\frac{BX}{BC} \cdot \frac{PY}{PX} \cdot \frac{DC}{DY} = 1$. Поскольку $BX = DY$ и $DC = BC$, то $PX = PY$.

Наш интерес к задаче, конечно, шире и состоит в определении характерных взаимосвязей в зависимости от величины a.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \Phi \qquad 1+\phi=\Phi$$

Рис. 1. Формирование золотой константы на основе квадрата

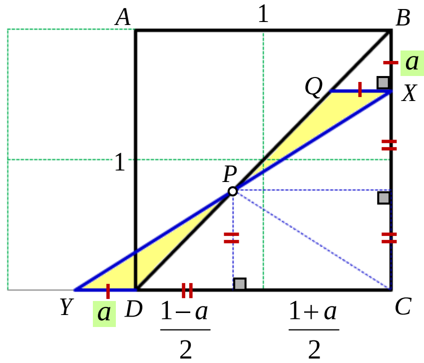


Рис. 2. Задача о середине отрезка в квадрате

Установление золотоносных свойств.

Из точки P опустим перпендикуляры на стороны квадрата. Из равенства желтых треугольников следует, что их высоты равны, а значит, равны отрезки, помеченные двумя черточками, и отрезок $PC = PX = PY$ становится общей стороной двух равнобедренных треугольников. Следовательно, основание квадрата разбивается на два отрезка $(1 \pm a) / 2$.

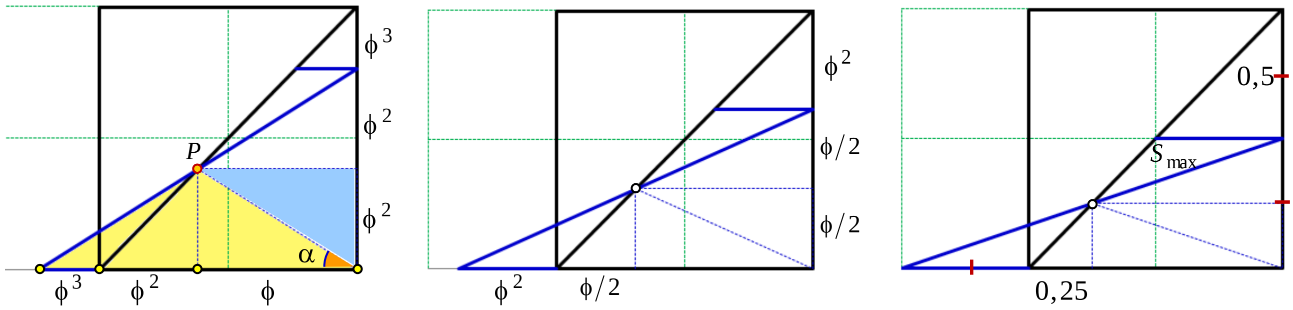
Проверим, могут ли они вместе с отрезком a образовать геометрическую прогрессию:

$$a : \frac{1-a}{2} : \frac{1+a}{2} = q \quad \to \quad \frac{2a}{1-a} : \frac{1-a}{1+a} \quad \to \quad a^2 + 4a - 1 = 0;$$

$$a = \sqrt{5} - 2 = \phi^3, \quad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi^{-1};$$

$$\sqrt{5} - 2 = \phi + \Phi - 2 = (\phi - 1) + (\Phi - 1) = -\phi^2 + \phi = \phi^3;$$

$$\frac{1-a}{2} = \phi^2, \quad \frac{1+a}{2} = \phi, \quad q = \phi.$$



Площадь треугольника $\Delta\, PXQ$, имеет максимум:

$$S_\Delta = \frac{a}{2} \cdot \frac{1-a}{2}, \quad S'_\Delta = \frac{1-2a}{4} = 0 \quad \to \quad a = 0{,}5; \ S_{\max} = 1/16.$$

Таким образом, геометрическая прогрессия длин отрезков приводит к золотой пропорции, в частности, между степенями малой золотой константы $1 = \phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3$.

Точку *P* можно назвать золотым полюсом квадрата. Он делит золотым сечением отрезок любой прямой, проходящей через данную точку, в пределах квадрата.

Угол $\alpha = \operatorname{arctg}\phi \approx 31{,}72^{\circ}$. Точка *P* является вершиной золотого прямоугольника со сторонами $\phi \times \phi^2$, а также золотого ромба [3], отношение диагоналей которого равно золотой константе Φ. – На рисунке выделены цветом половинки фигур по диагоналям.

То есть α – половина меньшего угла золотого ромба и угол между диагональю и большей стороной золотого прямоугольника.

Ряд авторов (V.Hoggatt, P.Bruckman, C.Kassir) вывели разные формулы для угла α, в том числе с использованием чисел Фибоначчи F_n и Лука L_n [4]:

$$\alpha = \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} = \frac{\pi - \operatorname{arctg}\Phi^5}{3} = \frac{\pi - \operatorname{arctg} 4/3}{4} = \sum_{k\ge 1} (-1)^{k+1} \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2k}} = \sum_{k\ge 1} \operatorname{arctg}\frac{1}{L_{2k}}.$$

Тупой угол золотого ромба $\pi - 2\alpha = \arccos\left(-1/\sqrt{5}\right) \approx 116{,}6^{\circ}$ равен двухгранному углу правильного додекаэдра.

Итак, наряду с моделью золотого роста на базе квадрата, установлена золотая геометрическая пропорция длин трех отрезков на стороне квадрата с образованием золотого полюса. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17972, 07.04.2013. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

2. Michael Penn. A nice geometry problem from New Zealand. – youtube.com/watch?v=PgmzD1oTrnI.

3. Wikipedia contributors. Golden rhombus. In Wikipedia, The Free Encyclopedia, November 7, 2022. – https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rhombus.

4. Decimal expansion of arctan(1/phi) // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – https://oeis.org/A195693.