С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 6. Японская храмовая геометрия. Золотые окружности правильного треугольника

Японская храмовая геометрия (сангаку – математическая дощечка) [1–4] – математические таблички и геометрические головоломки, выгравированные на расписных деревянных дощечках в эпоху Эдо (1603–1868). Обычно размещались в храмах, принося задачу в дар богам и одновременно бросая публичный вызов своим коллегам.

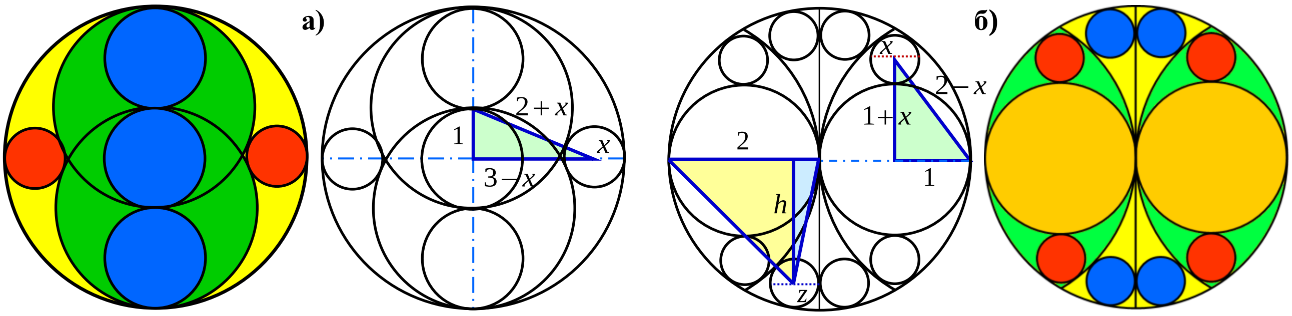
Страна была в полной самоизоляции. О трудах европейских ученых не знали.

Решали сангаку с помощью простой математики, и в настоящее время они больше представляет уникальное культурное достояние-наследие, объединившее в себе науку, искусство и религию, и содержат сильное эстетическое начало.

Если древние греки стремились через геометрию проникнуть во вселенские первоначала и объяснить мироустройство, то японцы больше наблюдали за явлениями этого мира, созерцали, любовались. Необыкновенное чувство формы и восприятие природной красоты нашло отражение в их самобытной геометрии.

Любопытный момент. Японские геометры, получив китайский перевод Начал Евклида, были сильно удивлены чрезмерной скрупулезностью и исключительной строгостью рассуждений, которыми действительно изобилуют древнегреческие трактаты. Зачем, – сказали они, – доказывать такие очевидные факты, когда есть ещё много красивых и сложных геометрических теорем [1].

Плюс к этому несомненное удовольствие от визуального наблюдения и особенной гармонии с повышенным вниманием к окружностям и эллипсам (рис. 1). Вторая задача имеет даже собственное имя – "хвост павлина" (1865): большая желтая окружность, в неё вписаны две оранжевые, которые охвачены дугами радиусом желтой с образованием зеленых фигур, далее вписаны 4 одинаковые красные окружности и 4 синие [5].



$$(2+x)^2 = 1^2 + (3-x)^2 \qquad x = 3/5$$

$$(2-x)^2 = 1^2 + (1+x)^2 \qquad x = 1/3$$

$$h^2 = (2-z)^2 - z^2 = (2+z)^2 - (2-z)^2; \quad z = 1/3$$

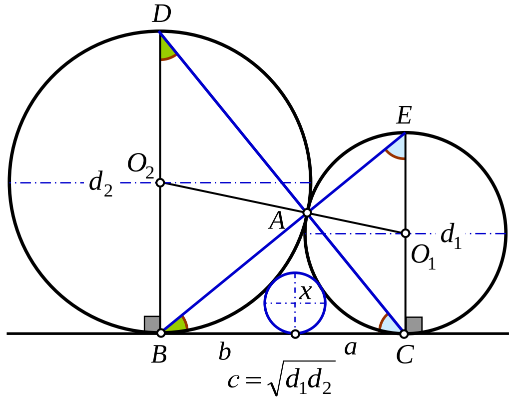
Рис. 1. Примеры сангаку: на дощечках приводились только цветные картинки и условие задачи: а) найти радиус красного круга; б) доказать равенство красных и синих кругов.

К слову, задача о трех окружностях [6] взята из сангаку [1]. Она решалась с использованием теоремы Пифагора и ряда алгебраических преобразований.

Но можно иначе, методом подобия и последующим составлением математической пропорции. Ближе к евклидовой геометрии. Такой подход выглядит более элегантно, отвечает общему принципу пространственной организации природных объектов и получил развитие в японской математике. Не случайно японская система образования в начальной и средней школе считается одной из лучших в мире – второй после Финляндии.

Японская храмовая геометрия. Золотые окружности правильного треугольника

Лемма. Пусть две окружности $O_1(r_1)$ и $O_2(r_2)$ касаются внешним образом в точке A, а их диаметры перпендикулярны внешней касательной BC. Тогда линии, соединяющие накрест лежащие концы этих диаметров, проходят через точку касания A и перпендикулярны. При этом $c = 2\sqrt{r_1 r_2}$.



Точка касания A лежит на прямой O_1O_2.

$DB \perp BC$, $EC \perp BC$ $\rightarrow$ $DB \parallel EC$.

Треугольники DO_2A и AO_1C – равнобедренные.

$\angle DO_2A = \angle AO_1C$ как внутренние накрестлежащие.

Отсюда $\angle O_1AC = \angle O_2AD$.

Значит, точки D, A, C лежат на одной прямой.

Аналогично и точки E, A, B лежат на одной прямой.

$\angle ACB = \angle AEC$, так как в сумме с $\angle ACE$ оба угла дают 90°.

$\Delta DBC \sim \Delta EBC$ – подобны по первому признаку подобия.

Из подобия следует пропорция $d_2 : c = c : d_1$, то есть

$c = \sqrt{d_1 d_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$ – среднее геометрическое диаметров.

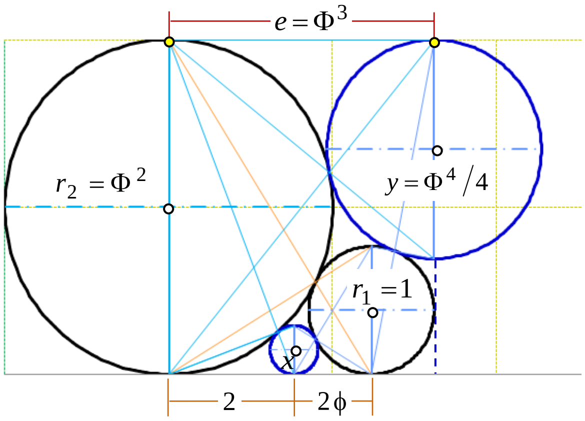
Вписанные углы при точке A опираются на диаметры, поэтому прямые.

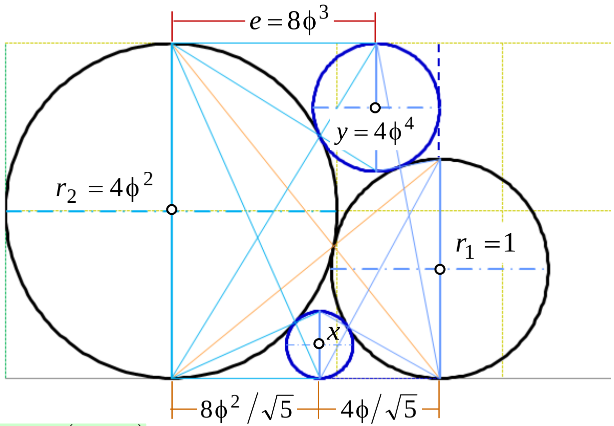
Применяя лемму, получаем формулу, связывающую три диаметра (радиуса):

$$c = b + a,\ \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{d_2 x} + \sqrt{d_1 x} \xrightarrow{\text{делим на } \sqrt{d_1 d_2 x}} 1/\sqrt{x} = 1/\sqrt{d_1} + 1/\sqrt{d_2}.$$

Данная задача тесно связана с аналогичной сангаку, когда третья окружность y имеет общую касательную линию с бо́льшей окружностью r_2, параллельную нижней касательной.

Объединим обе задачи в одну и проследим "золотые" закономерности.





$c = 2\sqrt{r_1 r_2} = 2\Phi$ $\qquad$ $r_2 = 2\sqrt{r_1 y} \ \rightarrow\ \sqrt{y} = r_2/\left(2\sqrt{r_1}\right)$ $\qquad$ $c = 2\sqrt{r_1 r_2} = 4\phi$

$x = \phi^2$ $\qquad$ $x = r_2/5 = 4/5\cdot\phi^2$

Диаметр круга y касается окружности r_1:

$\underline{e = c + r_1}$ $\rightarrow$ $2\sqrt{y r_2} = 2\sqrt{r_1 r_2} + r_1$;

$z = \sqrt{r_2/r_1} > 0$ $\rightarrow$ $z^3 - 2z - 1 = 0$;

$(z+1)(z^2 - z - 1) = 0$ $\rightarrow$ $z = \Phi$;

$r_1 = 1,\ r_2 = \Phi^2,\ y = \Phi^4/4,\ x = \phi^2$.

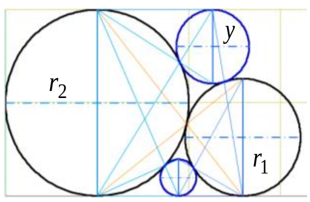
Диаметр круга r_1 касается окружности y:

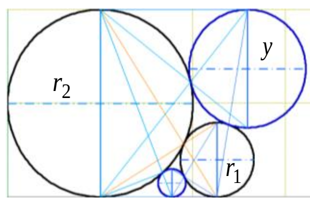
$\underline{c = e + y}$ $\rightarrow$ $2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{y r_2} + y$;

$z = \sqrt{r_2/r_1} > 0$ $\rightarrow$ $z^3 + 4z^2 - 8 = 0$;

$(z+2)(z^2 + 2z - 4) = 0$ $\rightarrow$ $z = 2\phi$;

$r_1 = 1,\ r_2 = 4\phi^2,\ y = 4\phi^4,\ x = 4/5\cdot\phi^2$.





$\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{r_1}{y} = 2^{2/3} \approx 1{,}587 \ \leftrightarrow\ \Phi \approx 1{,}618$ $\qquad$ $\dfrac{r_2}{y} = \dfrac{y}{r_1} = 2^{4/3} \approx 2{,}520 \ \leftrightarrow\ \Phi^2 \approx 2{,}618$

Аурумофилам (Au – золото) на заметку. Из приведенного примера видно, что геометрическая пропорция трех радиусов (r_1, r_2, y) приводит к кубическим корням, но весьма близким к константе золотого сечения (ЗС).

Подобных отношений много. Поэтому что там аурумофилы находят в живописи, архитектуре, неживой природе, или какие они рисуют логарифмические спирали, голословно выдавая их за золотые, наверно, и богу не известно.

В бога хоть можно поверить, а всякие искусственно-подгоночные наложения (сродни фотошопу) на веру принимать никак нельзя, за редким исключением. Даже вредно.

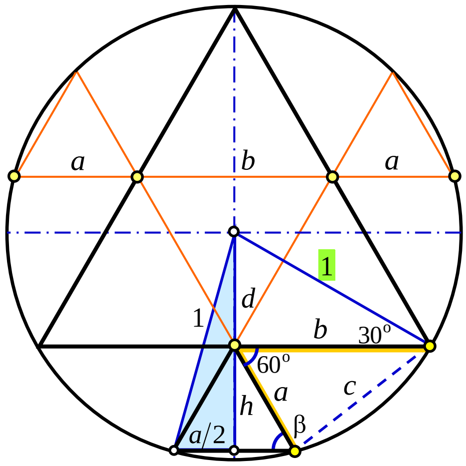
И беспричинно пыжиться малопродуктивно...

Продолжим поиск золотых крупиц в японской храмовой геометрии.

Два равносторонних треугольника в круге.

Равносторонний треугольник вписан в окружность, радиус которой без потери общности можно принять равным 1. Ниже вписан меньший равносторонний треугольник.

Приведем последовательность простых формул согласно принятым обозначениям на рисунке с учетом значений углов в равностороннем треугольнике [7]:



$d = 1 \cdot \sin 30^{\circ} = 1/2, \quad b = 1 \cdot \cos 30^{\circ} = \sqrt{3}/2;$

$h = a \cdot \sin 60^{\circ} = a \cdot \sqrt{3}/2 = a \cdot b.$

$(a/2)^2 + (d+h)^2 = 1^2$ – синий треугольник;

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{3}{4}a^2 = 1; \quad a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{4} = 0;$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\phi = b \cdot \phi.$$

Таким образом, имеем *золотое отношение*:

$$\frac{\text{половина стороны большего } \Delta}{\text{сторона меньшего } \Delta} = \frac{b}{a} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

В треугольнике со сторонами (a, b, c):

по теореме косинусов $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60^{\circ}} = \sqrt{2} \cdot a;$

по теореме синусов $\beta = \arcsin\left(b/c \cdot \sin 60^{\circ}\right) = \arcsin\left(\sqrt{3/8} \cdot \Phi\right) \approx 82{,}24^{\circ}.$

Американский доцент и популяризатор математики Майкл Пенн (Michael Penn, Randolph College, Virginia) предложил несложный способ решения данной задачи, сосредоточив основное внимание на формальном вычислении стороны a.

Осталось сделать буквально завершающий шаг до установления золотой пропорции между сторонами треугольников: $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{b}{a} = \Phi.$

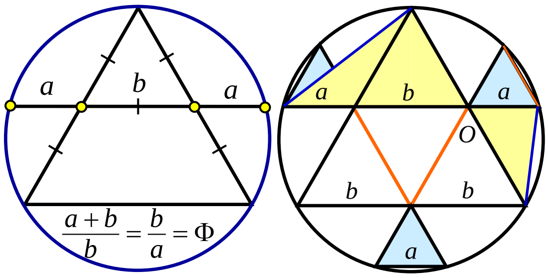
В целом способ больше тяготеет к западному подходу с использованием алгебраической геометрии, и японцы вряд ли таким образом решали сангаки.

Прежде всего, они стремились раскрыть соразмерности, увидеть гармонию и утонченную красоту.

Например, можно легко показать равенство треугольников, выделенных синим цветом (см. рис. ниже) и образованных *средними линиями*, которые проходят через середины сторон треугольника до пересечения с описанной окружностью.

Далее следует способ Ж.Одома.

Равносторонний треугольник.



G.Odom предложил [8] изящную и простую форму золотого отношения с использованием отрезков средней линии правильного треугольника.

Если через середины двух сторон провести прямую линию до пересечения с описанной окружностью, то образуемые три точки находятся в золотой пропорции.

Это свойство использовалось нами, в частности, при построении так называемой «русской матрешки в геометрических образах золотой пропорции» [9].

Способ неоднократно воспроизводился в других источниках [10, с. 10], включая юбилейную монографию [11, с. 294], и основан на теореме о пересекающихся хордах в точке O (произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды):

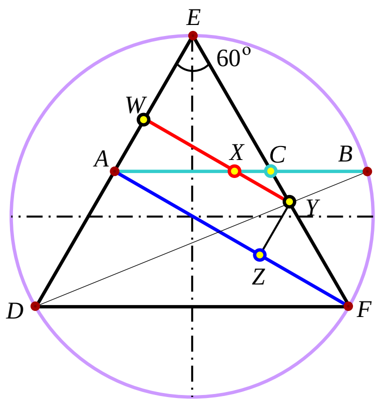
$$(a+b)\cdot a = b\cdot b.$$

Введя обозначение $x=b/a$, получаем квадратное уравнение $x^2-x-1=0$ с положительным решением $x=\Phi$.

Аналогичная пропорция следует из подобия желтых треугольников (по первому признаку) в виду равенства вертикальных и вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

Но это не всё...

Несколько добавочных линий (рис. 1), и на базе равностороннего треугольника мы получаем целый набор вариантов золотой пропорции на разных отрезках.



Последовательность построений:

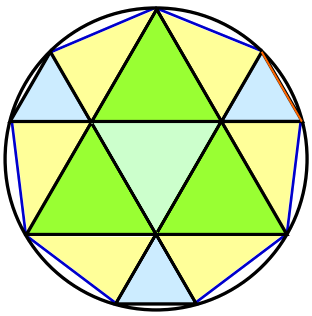
ΔEDF, $\bullet A\,(EA=AD)$, $\bullet C\,(EC=CF)$,
$AB\,(AC)$, DB, $YZ\perp AF$, $YW\perp ED$.

$$\Phi=\frac{AC}{CB}=\frac{EY}{YF}=\frac{AZ}{ZF}=\frac{WX}{XY}=\frac{EW}{WA}=\overset{\frown}{EB}\Big/\overset{\frown}{BF}$$

$$\Phi=\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{EY}=\frac{AF}{AZ}=\frac{WY}{WX}=\frac{EA}{EW}=\overset{\frown}{EF}\Big/\overset{\frown}{EB}$$

Рис. 1. Формирование множества золотых сечений на основе правильного треугольника

Аналогичным образом выполняются построения относительно других серединных точек треугольника (типа C). Этим самым разрушается привычный миф об исключительной "золотоносности" пентаграммы и связанной с ней пятиконечной звезды.



Как видно, равносторонний треугольник способен продуцировать целый букет золотых сечений, включая отношение площадей [12]: площадь каждого зеленого треугольника в Φ раз больше площади желтого треугольника, которая в Φ раз больше площади каждого синего треугольника:

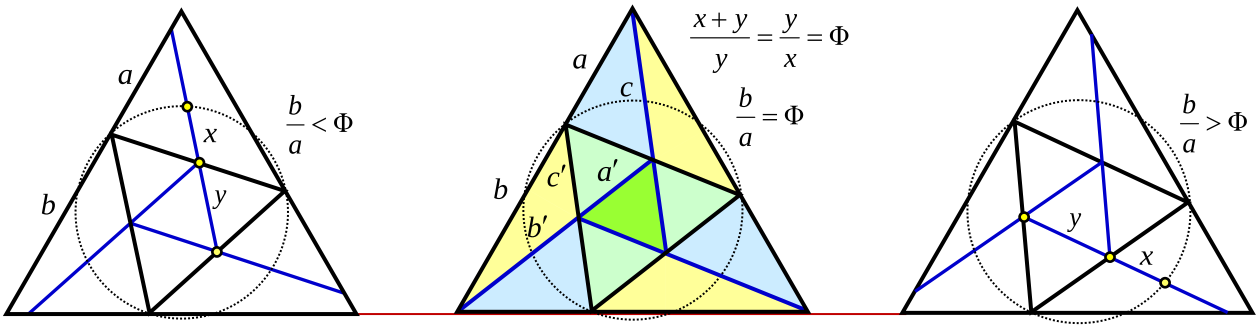
$$\frac{S_{\text{зел.}}}{S_{\text{жел.}}}=\frac{S_{\text{жел.}}}{S_{\text{син.}}}=\Phi.$$

Картинка гармонична, в духе сангаку.

Золотая окружность правильного треугольника.

Golden Ratio in Inscribed Equilateral Triangles. – cut-the-knot.org/do_you_know/Buratino7.shtml.

В правильный треугольник вписан меньший равносторонний треугольник так, что продолжения его средних линий проходят через вершины исходного. Тогда вершины внутреннего треугольника делят стороны внешнего треугольника в золотой пропорции.



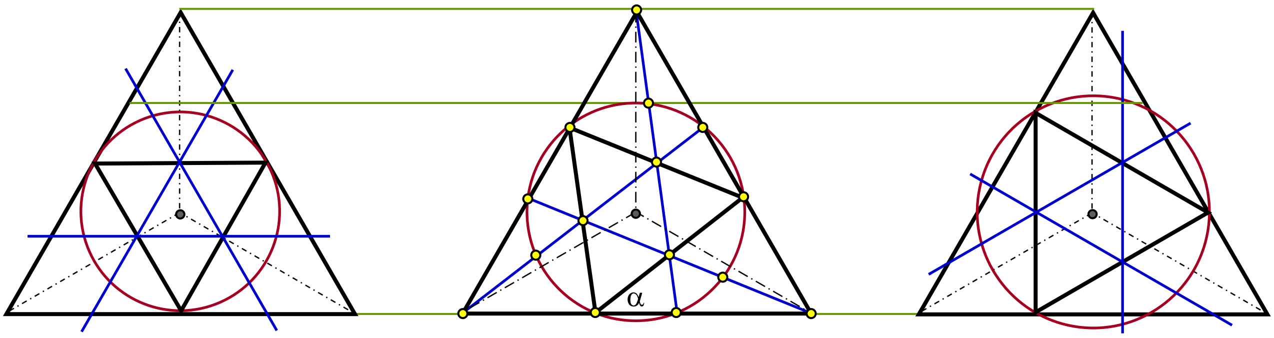
Действительно, согласно теореме Фалеса (параллельные секущие образуют на прямых пропорциональные отрезки) и подобию треугольников составляем последовательность отношений

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{c}=\frac{b}{a+b}=x \;\rightarrow\; x=\phi,$$

крайние из которых образуют золотую пропорцию.

При других отношениях $b/a \neq \Phi$ продолжения средних линий проходят в стороне от вершин исходного треугольника. Какую же роль тогда играют средние линии, делящие пополам стороны вписанного треугольника? И где же золотое сечение, практически всегда сопутствующее делению пополам? – Оказывается, никуда оно не делось, только находится среди других параметров.

При любом расположении вписанного треугольника его средние линии образуют золотую пропорцию с точками описанной окружности. Неизменно. Всегда.

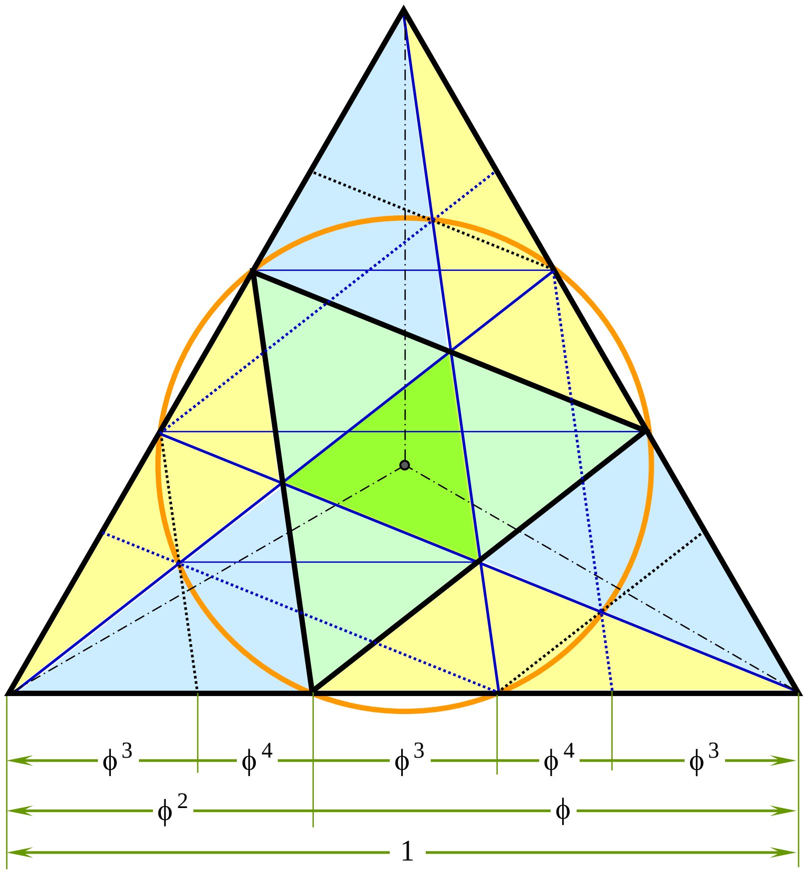


Впишем в равносторонний треугольник Δ_1 со стороной $a_1 = 1$ другой правильный треугольник Δ_2 со стороной $a_2 = 1/2$, в котором проведем средние линии – через середины сторон и опишем окружность. Будем поворачивать Δ_2 вокруг центра по часовой стрелке с масштабированием так, чтобы его вершины двигались вдоль сторон Δ_1. При изменении угла наклона от 60° до нуля произойдет полное совмещение треугольников.

В один момент средние линии Δ_2 пройдут через вершины Δ_1, а вершины Δ_2 разделят стороны Δ_1 золотым сечением. Более того, средние линии Δ_2 также разделят стороны Δ_1 золотым сечением в симметричных точках относительно середины сторон Δ_1.

Но и это не всё. Все шесть точек золотого сечения сторон Δ_1 совпадут с точками на описанной окружности Δ_2.

Образуется воистину уникальный золотоносный геометрический объект, буквально нашпигованный золотыми отношениями: как на сторонах Δ_1, так и на средних линиях Δ_2.



Радиус золотой окружности $R_g = \phi^2\sqrt{2/3} \approx 0{,}3119$. Построение простое: на стороне исходного треугольника любым способом определяется точка золотого сечения, через которую проводится окружность из центра треугольника.

Соединение точек пересечения между собой и вершинами Δ_1 дает одновременно вершины Δ_2 и его средние линии.

Для единичной стороны исходного треугольника, сторона вписанного золотоносного треугольника равна по теореме косинусов

$$a = \sqrt{\phi^2 + \phi^4 - 2\phi^3 \cdot \cos 60^{\circ}} = \phi^2\sqrt{2} \approx 0{,}540$$

– меньшая часть золотого сечения для диагонали единичного квадрата. – Весьма любопытное наблюдение.

Угол наклона – по теореме синусов: $\dfrac{\phi^2}{\sin\alpha} = \dfrac{\phi^2\sqrt{2}}{\sin 60^{\circ}}$, $\sin\alpha = \sqrt{3/8} \rightarrow \alpha \approx 37{,}76^{\circ}$.

Примечательно, что $\sqrt{3/8}$ – радиус описанной сферы (конгруэнтной вершинам) для правильного тетраэдра с единичными ребрами.

Основные параметры приведены в таблице:

Параметр	Δ_1	Δ_2
Сторона	1	$\phi^2\sqrt{2}\approx 0{,}540$
Высота	$\sqrt{3}/2\approx 0{,}866$	$\phi^2\sqrt{3/2}\approx 0{,}468$
Радиус описанной окружности	$1/\sqrt{3}\approx 0{,}577$	$\phi^2\sqrt{2/3}\approx 0{,}312$
Средняя линия	$\sqrt{5}/2\approx 1{,}118$	$\phi^2\sqrt{5/2}\approx 0{,}604$
Площадь	$\sqrt{3}/4\approx 0{,}433$	$\phi^4\sqrt{3}/2\approx 0{,}126$

Площади. Исходный треугольник можно разбить на группы равных треугольников: 4 зеленых равносторонних, а также 3 желтых и 3 синих с равными площадями, поскольку они имеют равные основания и высоты:

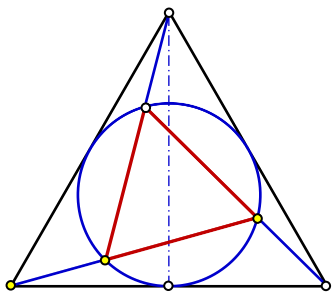
$$S_{\text{зел.}}=\frac{S_2}{4}=\phi^4\frac{\sqrt{3}}{8},\qquad S_{\text{жел.}}=S_{\text{син.}}=\frac{S_1-S_2}{6}=\left(1-2\phi^4\right)\frac{\sqrt{3}}{24};$$

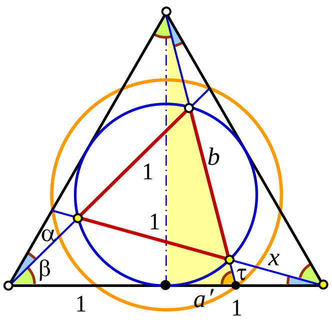
$$\frac{S_{\text{жел.}}}{S_{\text{зел.}}}=\frac{S_{\text{син.}}}{S_{\text{зел.}}}=\frac{1-2\phi^4}{3\phi^4}=\frac{\Phi^4-2}{3}=\Phi.$$

Вторая золотая окружность правильного треугольника.

Во вписанную окружность правильного треугольника Δ_1 вписан равносторонний треугольник Δ_2 так, что продолжения его сторон проходят через вершины Δ_1.

Это еще один вариант вьетнамского новатора *Tran Quang Hung* [13] в демонстрации элегантных проявлений золотого сечения. По его описанию из каждой вершины к точкам вписанной окружности проводятся три отрезка так, чтобы они касались друг друга и образовывали треугольник внутри круга. Тогда длина каждого такого отрезка в Ф раз больше длины стороны внутреннего треугольника.





Без потери общности можно считать стороны малого треугольника равными 1. Значит, стороны большего треугольника равны 2.

Согласно теореме о секущей и касательной, которые проведены из одной точки к окружности, произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной, то есть

$$x\cdot(x+1)=1^2\ \rightarrow\ x=\phi.$$

Всё просто, и потому отменно!

Правда, есть "камень преткновения" (Рим. 9:32). Гладко вписано в бумаге, да забыли про овраги (Лев Толстой). – В теории многое кажется легким, и бескомпромиссная практика часто опровергает оптимистические надежды.

Как это всё, с виду простое, теперь грамотно начертить? Не подбором же и подгонкой?

Мы перепробовали разные пробные шаги-подходы. Остановились на использовании аналитических формул.

Итак, сумма углов $\alpha+\beta=60^{\circ}$, угол $\tau=60^{\circ}+\alpha$. По теореме синусов:

$$\frac{2}{\sin 120^{\circ}}=\frac{\phi}{\sin\alpha}\ \rightarrow\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}\phi,\ \ \alpha\approx 15{,}5^{\circ}\ \text{ и }\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{5}}.$$

Тангенс $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, тогда $\operatorname{tg}\left(60^\circ + \alpha\right) = \dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\sqrt{3}$.

Высота большего треугольника Δ_1 равна $h = \sqrt{3}$.

Основание a' и гипотенуза b прямоугольного треугольника (желтого цвета):

$$a' = \frac{h}{\operatorname{tg}\left(60^\circ + \alpha\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = \sqrt{h^2 + a'^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 4a'.$$

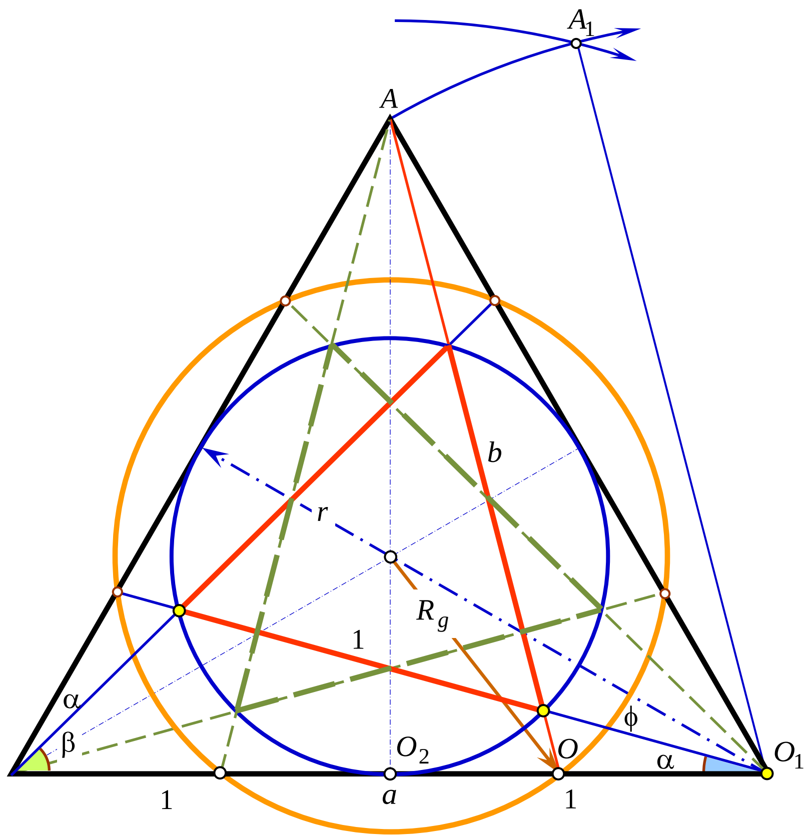
Дополняем его такой же фигурой до равнобедренного треугольника с основанием $a = 2a'$ и боковой стороной $b = 2a$, которая в два раза больше основания. То есть периметр равнобедренного треугольника состоит из пяти частей: одна часть – основание и две пары частей – боковые стороны. Число пять сакральное для золотого сечения. И в данном случае образовано на традиционно-половинном соотношении 1:2.

Теперь отчетливее вырисовывается картина построения.

Итак, достраиваем равнобедренный треугольник. Проводим из вершины и середины основания исходного правильного треугольника Δ_1 (точки O_1 и O_2) дуги радиусом, равным стороне длиной 2, до их пересечения в точке A_1, которую соединяем с вершиной O_1.

Из вершины A проводим $AO \parallel A_1O_1$; AO – искомая линия боковой стороны b.

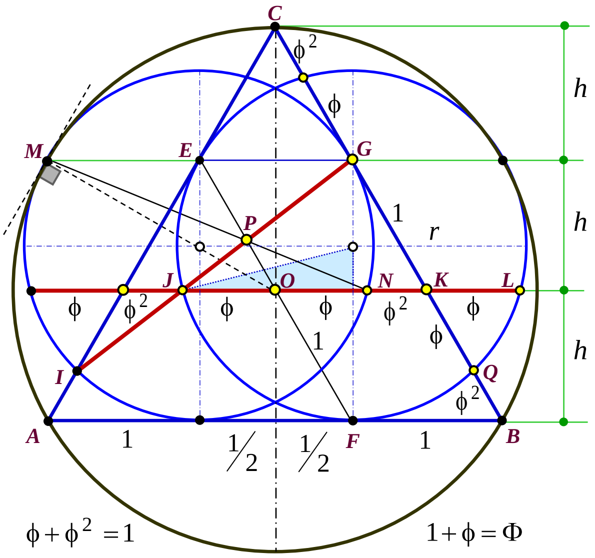
Из центра правильного треугольника проводим золотую окружность через точку O радиусом R_g, которая пересекает стороны треугольника Δ_1 в шести точках. Их соединение с вершинами Δ_1 завершает построение.



$$R_g = \sqrt{(h/3)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{8}{15}} \qquad \frac{R_g}{r} = \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1,265$$

Смешанные окружности в правильном треугольнике.

Вокруг правильного треугольника описана окружность. В два его угла вписаны два круга, касающиеся внешней окружности. – Идея Tran Quang Hung [13].



Изложим наше представление, которое несколько расширено, более систематизировано и одновременно простое в доказательстве.

Пусть сторона треугольника $a = 3$.

Тогда треть его высоты $h = a\sqrt{3}/6 = \sqrt{3}/2$.

Радиус кругов, как радиус окружности, вписанной в угол *A*: $r = AF/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$.

ЗС "приурочены" к трем прямым:

1. Линия, проходящая через центр треугольника || основанию.
2. Линия, соединяющая точку *I* пересечения окружности с одной стороной Δ и точку касания *G* с другой стороной, плюс узловая точка *P*.
3. Сторона треугольника.

1) Катет треугольника, выделенного цветом, $b = \sqrt{r^2-(r-h)^2} = \sqrt{2rh-h^2} = \sqrt{5}/2$.

Отрезки $JO = KL = b - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$, $OL = 1+\phi = \Phi$.

Отсюда следуют золотые отношения $\dfrac{KO}{JO} = \dfrac{OK}{LK} = \Phi$.

2) Отрезок $GJ = \sqrt{h^2+b^2} = \sqrt{2}$. По теореме о произведении отрезков хорд (точка *J*)

$$1\cdot 2\phi = IJ\cdot GJ \;\to\; IJ = 2\phi/\sqrt{2} = \sqrt{2}\phi \;\to\; GJ/IJ = \Phi.$$

Проведем через центр исходного треугольника $EF \parallel CB \;\to \Delta\, JPO \sim \Delta\, JGK$.

Точка пересечения *P* – узловая точка золотых сечений, то есть любой отрезок, заключенный между двумя линиями одной трети высоты и проходящий через точку *P*, делится в ней золотым сечением. Итак, другой набор ЗС:

$$\frac{GJ}{IJ} = \frac{GP}{JP} = \frac{EP}{OP} = \frac{MP}{NP} = \Phi.$$

3) Отрезки $GK = KB = 1$. Обозначим $x = KQ$.

По теореме о произведении отрезков хорд относительно точки *K*:

$$x(x+1) = \phi\cdot\left(2\phi+\phi^2\right) = 1 \;\to\; x = \phi.$$

Получаем третий набор ЗС: $\dfrac{QG}{CG} = \dfrac{GK}{QK} = \dfrac{KQ}{BQ} = \Phi$.

Аналогичные пропорции следуют из других пар окружностей, вписанных в углы правильного треугольника.

Ключевым звеном в "раскрутке" выявленных соотношений является наличие отрезков 1 и $1/2$, как показано на рисунке.

То есть основа всей золотоносной структуры – деление целого пополам.

Вместо заключения.

Буквальный перевод *Japanese temple geometry problem* [1] – задача японской храмовой геометрии. Хотя к храмовому зодчеству имеет отдаленное отношение.

Тем не менее, в отличие от разных примеров в архитектуре, когда постфактум золотое сечение с большой натяжкой выискивают во всём и везде, было бы только желание, в представленных геометрических построениях золотой феномен присутствует в чистом виде.

Без подгонок и надуманных манипуляций-подтасовок.

Чистая математика и ничего лишнего. – *Ne quid nimis*!

К желанной цели можно придти разными путями. И не всегда наиболее очевидная стезя – самая удачная.

Главное, верить, что в итоге всё получится. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Щетников А.И. Японская храмовая геометрия // Математика, № 17, 2006. – С. 18-21. – classics.nsu.ru/pythagoras/Japan_temple_geometry.pdf.
2. Fukagawa H., Pedoe D. Japanese Temple Geometry Problems. San Gaku. Winnipeg: Charles Babbage Research Foundation, 1989.
3. Rothman T. Japanese Temple Geometry // Scientific American, 278, № 5 1998, 85–91.
4. Карлюченко А.В., Карлюченко О.А. Сангаку. Японская храмовая геометрия. – Киев: Сталь, 2012. – 248 с.
5. GetAClass – Просто математика. Японская храмовая геометрия • 3. – youtube.com/watch?v=ZDJbJzq2SR4.
6. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 1. Общие закономерности и классическая задача о трех кругах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28172, 17.11.2022. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165153.htm.
7. Michael Penn. A Japanese Temple Geometry Problem from 1800. – youtube.com/watch?v=4ulzbICdw5Q.
8. Odom G., J. van de Craats. Elementary Problem E3007 // American Math. Monthly, 90 (1983) 482; solution, 93 (1986) 572.
9. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15978, 04.07.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm.
10. Roberts S. King of Infinite Space: Donald Coxeter. The Man Who Saved Geometry. – Walker & Company, 2006.
11. The Changing Shape of Geometry: Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching (Ed. by C.Pritchard). – Cambridge University Press, 2002. – 540 p.
12. Odom G. Elementary Problem E3007 // American Math. Monthly 90 (1983), 482.
13. Cut the knot. Golden Ratio in Geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml.

Украина, Харьков