Н. Ф. Семенюта

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧИСЕЛ ПЕЛЛЯ

Аннотация: В статье рассмотрены последовательности чисел Пелля и Пелля-Люка, их взаимосвязи с золотым сечением, показательными и гиперболическими функциями. Получены формулы гиперболических функций последовательностей чисел Пелля и Пелля-Люка. Приведены формулы расчета чисел и последовательностей гиперболических функций Пелля и Пелля-Люка.

Ключевые слова: Числа Пелля, числа Пелля-Люка, последовательности чисел Пелля, последовательности чисел Люка, золотое сечение, гиперболические функции, последовательности чисел гиперболических функций.

Исходные положения

Числа Пелля — целые числа, входящее в качестве знаменателя в бесконечную последовательность подходящих дробей, для квадратного корня из 2

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{20},\ \frac{99}{70},\ \ldots \to \sqrt{2}\,, \qquad (1)$$

знаменатель которой, соответствует последовательности числа Пелля

$$\begin{matrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9\ \ldots, \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 12 & 29 & 70 & 169 & 408 & 985\ \ldots, \end{matrix} \qquad (2)$$

Числа Пелля образуется по соотношению:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

Последовательность Пелля (2) взаимосвязана с последовательностью чисел Пелля — Люка

$$\begin{matrix} PL_0 & PL_1 & PL_2 & PL_3 & PL_4 & PL_5 & PL_6 & PL_7\ \ldots, \\ 2 & 2 & 6 & 14 & 34 & 82 & 198 & 478\ldots\ , \end{matrix} \qquad (4)$$

которая образуется по соотношению:

$$PL_n = 2PL_{n-1} + PL_{n-2}, \qquad PL_0 = 2, \quad PL_1 = 2\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5)$$

Числа Пелля-Люка PL_n и Пелля P_n связаны соотношениями:

$$PL_n = P_{n+1} + P_{n-1}, \qquad P_n \cdot PL_n = P_{2n}.$$

При $n > 10$, числа Пелля P_n и Пелля-Люка PL_n связаны соотношениями:

$$PL_n = P_n\sqrt{8}\,, \quad P_n = \frac{PL_n}{\sqrt{8}}.$$

Модифицированной последовательности чисел Пелля соответствует числитель подходящей дроби (1)

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8\ \ldots, \qquad Q_0 = 0, \ \mathrm{Q}_1 = 1,$$

$$1 \quad 1 \quad 3 \quad 7 \quad 17 \quad 41 \quad 99 \quad 239 \ldots, \qquad (6)$$

которая образуется по соотношению:

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \qquad Q_1 = 1, \; Q_2 = 1, \qquad Q_n = \frac{PL_n}{2}. \qquad (7)$$

.

Уравнения последовательностей чисел Пелля

Основной последовательностям чисел Пелля и Пелля-Люка соответствует характеристическое уравнение с целочисленными коэффициентами при x:

$$x^2 - 2x - 1 = 0. \qquad (8)$$

Иррациональные корни уравнения равны числам:

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} = M = 2{,}414..., \qquad (9)$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} = -M^{-1} = -0{,}414, \qquad (10)$$

которые, связаны с показательными и гиперболическими функциями:

$$x_1 = M = e^{\alpha} = sh\ \alpha + ch\ \alpha = 2{,}414, \qquad x_2 = -M^{-1} = -e^{-\alpha} = sh\ \alpha - ch\ \alpha, = -0{,}414,$$

$$\text{sh}\ \alpha = 1, \qquad \text{ch}\ \alpha = \sqrt{2} = 1{,}414, \qquad \alpha = \ln M = \ln 2{,}414 = 0{,}881,$$

$$x_1 - x_1 = 2\text{ch}\ \alpha = 2{,}828, \qquad x_1 + x_1 = 2\text{sh}\ \alpha = 2,$$

$$sh\ \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = 1, \qquad ch\ \alpha = \frac{e^{\gamma\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414.$$

Из приведенных соотношений следует степени корней:

$$x_1^1 = 2{,}414 = M^1 = e^{\alpha} = \text{ch}\ \alpha + \text{sh}\ \alpha,$$
$$x_1^2 = 5{,}828 = M^2 = e^{2\alpha} = \text{ch}\ 2\alpha + \text{sh}\ 2\alpha,$$
$$x_1^3 = 14{,}071 = M^3 = e^{3\alpha} = \text{ch}\ 3\alpha + \text{sh}\ 3\alpha,$$
$$x_1^4 = 33{,}970 = M^4 = e^{4\alpha} = \text{ch}\ 4\alpha + \text{sh}\ 4\alpha,$$
$$x_1^5 = 82{,}012 = M^5 = e^{5\alpha} = \text{ch}\ 5\alpha + \text{sh}\ 5\alpha,$$

$$x_2^1 = -0{,}414 = -M^{-1} = -e^{-\alpha} = \text{sh}\ \alpha - \text{ch}\ \alpha,$$
$$x_2^2 = 0{,}171 = M^{-2} = e^{-2\alpha} = \text{sh}\ 2\alpha - \text{ch}\ 2\alpha,$$
-
$$x_2^3 = -0{,}071 = -M^{-3} = -e^{-3\alpha} = \text{sh}\ 3\alpha - \text{ch}\ 3\alpha,$$
$$x_2^4 = 0{,}029 = M^4 = e^{-4\alpha} = \text{sh}\ 4\alpha - \text{ch}\ 4\alpha,,$$
$$x_1^5 = -0{,}012 = -M^{-5} = -e^{-5\alpha} = \text{sh}\ 5\alpha - \text{ch}\ 5\alpha.$$

При этом разность и сумма корней уравнения:

$x_1 - x_2 = 2{,}828 = \sqrt{8}P_1, = M + M^{-1} = e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2\mathrm{ch}\ \alpha$,
$x_1^2 - x_2^2 = 5{,}656 = \sqrt{8}P_2 = M^2 - M^{-2} = e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} = 2\mathrm{sh}\ 2\alpha$,
$x_1^3 - x_2^3 = 14{,}138 = \sqrt{8}P_3 = M^3 + M^{-3} = e^{3\alpha} + e^{-3\alpha} = 2\mathrm{ch}\ 3\alpha$,
$x_1^4 - x_2^4 = 33{,}890 = \sqrt{8}P_4 = M^4 - M^{-4} = e^{4\alpha} - e^{-4\alpha} = 2\mathrm{sh}\ 4\alpha$
$x_1^5 - x_2^5 = 82{,}096 = \sqrt{8}P_5 = M^5 + M^{-5} = e^{5\alpha} + e^{-5\alpha} = 2\mathrm{ch}5\alpha$,

$x_1^2 + x_2^2 = 2 = PL_1 = \mathrm{M}^1 - M^{-1} = e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2\mathrm{sh}\ \alpha$,
$x_1^2 + x_2^2 = 6 = PL_2 = \mathrm{M}^2 + M^{-2} = e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} = 2\mathrm{ch}\ 2\alpha$,
$x_1^2 + x_2^2 = 14 = PL_3 = M^3 - M^{-3} = e^{3\alpha} - e^{-3\alpha} = 2\mathrm{sh}\ 3\alpha$,
$x_1^4 + x_2^4 = 34 = PL_4 = M^4 + M^{-4} = e^{4\alpha} + e^{-4\alpha} = 2\mathrm{ch}\ 4\alpha$,
$x_1^5 + x_2^5 = 82 = PL_5 = M^5 - M^{-5} = e^{5\alpha} - e^{-5\alpha} = 2\mathrm{sh}\ 5\alpha$.

Числа последовательностей Пелля и Пелля-Люка связаны с корнями уравнения:

$$P_n = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{\sqrt{8}} = \frac{M^n + M^{-n}}{\sqrt{8}}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$P_n = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{\sqrt{8}} = \frac{M^n - M^{-n}}{\sqrt{8}}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$PL_n = x_1^n + x_2^{-n} = M^n - M^{-n}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$PL_n = x_1^n + x_2^{-n} = M^n + M^{-n}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

а также с показательными и гиперболическими функциями

$$P_n = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{\sqrt{8}} = \frac{2ch\ n\alpha}{\sqrt{8}} = \frac{ch\ n\alpha}{ch\ \alpha}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$P_n = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\sqrt{8}} = \frac{2sh\ n\alpha}{\sqrt{8}} = \frac{sh\ n\alpha}{ch\ \alpha}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$PL_n = e^{n\alpha} - e^{-n\alpha} = 2sh\ n\alpha, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$PL_n = e^{n\alpha} + e^{-n\alpha} = 2ch\ n\alpha, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Из полученных формул чисел Пелля и Пелля-Люка следуют формулы гиперболических функций:

$$\mathrm{ch}\ n\alpha = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}}{2} = \frac{M^n + M^{-n}}{2} = \frac{P_n\sqrt{8}}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\mathrm{sh}\ n\alpha = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{n\alpha} - e^{-n\alpha}}{2} = \frac{M^n - M^{-n}}{2} = \frac{P_n\sqrt{8}}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$\text{sh } n\alpha = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{e^{n\alpha} - e^{-n\alpha}}{2} = \frac{M^n - M^{-n}}{2} = \frac{PL_n}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

,

$$\text{ch } n\alpha = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2} = \frac{M^n + M^{-n}}{2} = \frac{PL_n}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

а также рекуррентные гиперболические последовательности функций типа Пелля и Пелля-Люка:

$P_1\sqrt{8}$	$P_2\sqrt{8}$	$P_3\sqrt{8}$	$P_4\sqrt{8}$	$P_5\sqrt{8}$
2ch 1α	**2sh 2α**	**2ch 3α**	**2sh 4α**	**2ch 5α …,**
2,828	5,656	14,138	33,890	82,096

PL_1	PL_2	PL_3	PL_4	PL_5
2sh 1α	**2ch 2α**	**2sh 3α**	**2ch 4α**	**2sh 5α …**
2	6	14	34	82

При $n\alpha > 5$ обе функции практически совпадают

$$\text{sh } n\alpha = \text{ch } n\alpha = \frac{1}{2}e^{n\alpha} = \frac{\sqrt{8}}{2}P_n = \frac{1}{2}PL_n,$$

$$\frac{sh(n+1)\alpha}{sh\ n\alpha} = \frac{ch(n+1)\alpha}{ch\ n\alpha} = e^{\alpha} = M = 2{,}414.$$

Последовательностям чисел Пелля и Пелля-Люка с иррациональным коэффициентом при x соответствует также характеристическое уравнение:

$$x^2 - \sqrt{8}\,x + 1 = 0. \qquad (11)$$

Корни уравнения (8) равны числам:

$$x_1 = \frac{\sqrt{8}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1 = M = 2{,}414...,$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{8}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 = M^{-1} = 0{,}414,$$

которые связаны с показательными и гиперболическими функциями:

$$x_1 = M = e^{\alpha} = sh\ \alpha + ch\ \alpha = 2{,}414, \qquad x_2 = M^{-1} = e^{-\alpha} = ch\ \alpha - sh\ \alpha, = 0{,}414,$$

$$\text{sh } \alpha = 1, \qquad \text{ch } \alpha = \sqrt{2}, \qquad \alpha = \ln M = \ln 2{,}414 = 0{,}881,$$

$$x_1 - x_1 = 2\text{sh } \alpha = 2, \qquad x_1 + x_1 = 2\text{ch } \alpha,$$

$$sh\ \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = 1, \qquad ch\ \alpha = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = 1{,}414.$$

Из приведенных соотношений следует степени корней:

$$x_1^1 = 2{,}414 = M^1 = e^{\alpha} = \text{ch } \alpha + \text{sh } \alpha,$$
$$x_1^2 = 5{,}828 = M^2 = e^{2\alpha} = \text{ch } 2\alpha + \text{sh } 2\alpha,$$
$$x_1^3 = 14{,}071 = M^3 = e^{3\alpha} = \text{ch } 3\alpha + \text{sh } 3\alpha,$$
$$x_1^4 = 33{,}970 = M^4 = e^{4\alpha} = \text{ch } 4\alpha + \text{sh } 4\alpha,$$
$$x_1^5 = 82{,}012 = M^5 = e^{5\alpha} = \text{ch } 5\alpha + \text{sh } 5\alpha,$$

$$x_2^1 = 0{,}414 = M^{-1} = e^{-\alpha} = ch\alpha - sh\alpha,$$
$$x_2^2 = 0{,}171 = M^{-2} = e^{-2\alpha} = ch2\alpha - sh2\alpha,$$
- $$x_2^3 = 0{,}071 = M^{-3} = e^{-3\alpha} = ch3\alpha - sh3\alpha,$$
$$x_2^4 = 0{,}029 = M^{41} = e^{-4\alpha} = ch4\alpha - sh4\alpha,$$
$$x_1^5 = 0{,}012 = M^{-5} = e^{-5\alpha} = ch5\alpha - sh5\alpha.$$

При этом разность и сумма корней уравнения:

$$x_1 - x_2 = 2 = PL_1 = M - M^{-1} = e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2\text{sh } \alpha \text{ , ?}$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 5{,}656 = \sqrt{8}P_2 = M^2 + M^{-2} = e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} = 2\text{sh } 2\alpha,$$
$$x_1^3 - x_2^3 = 14 = PL_3 = M^3 - M^{-3} = e^{3\alpha} - e^{-3\alpha} = 2\text{sh } 3\alpha,$$
$$x_1^4 - x_2^4 = 33{,}890 = \sqrt{8}P_4 = M^4 + M^{-4} = e^{4\alpha} - e^{-4\alpha} = 2\text{sh } 4\alpha$$
$$x_1^5 - x_2^5 = 82 = PL_5 = M^5 - M^{-5} = e^{5\alpha} - e^{-5\alpha} = 2\text{sh } 5\alpha,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2{,}828 = \sqrt{8}P_1 = \text{M}^1 - M^{-1} = e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2\text{ch } \alpha,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 6 = PL_2 = \text{M}^2 + M^{-2} = e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} = 2\text{ch } 2\alpha,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 14{,}142 = \sqrt{8}P_1 = M^3 - M^{-3} = e^{3\alpha} + e^{-3\alpha} = 2\text{ch } 3\alpha,$$
$$x_1^4 + x_2^4 = 34 = PL_4 = M^4 + M^{-4} = e^{4\alpha} - e^{-4\alpha} = 2\text{ch } 4\alpha \text{ ,}$$
$$x_1^5 + x_2^5 = 82{,}024 = \sqrt{8}P_1 = M^5 - M^{-5} = e^{5\alpha} + e^{-5\alpha} = 2\text{ch } 5\alpha.$$

Числа последовательностей Пелля и Пелля-Люка связаны с корнями уравнения, показательными и гиперболическими функциями:

$$P_n = \frac{x_1^n - x_2^n -}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{\sqrt{8}} = \frac{M^n + M^{-n}}{\sqrt{8}}, \qquad n = 1, 3, 5, ,$$

$$P_n = \frac{x_1^n - x_2^n -}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{\sqrt{8}} = \frac{M^n + M^{-n}}{\sqrt{8}},$$

$$PL_n = x_1^n + x_2^{-n} = M^n - M^{-n}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$PL_n = x_1^n + x_2^{-n} = M^n - M^{-n},$$

а также с показательными гиперболическими функциями:

$$P_n = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{\sqrt{8}} = \frac{2ch\ n\alpha}{\sqrt{8}} = \frac{ch\ n\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{ch\ n\alpha}{ch\alpha}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$P_n = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\sqrt{8}} = \frac{2sh\ n\alpha}{\sqrt{8}} = \frac{sh\ \ n\alpha}{2} = \frac{sh\ n\alpha}{ch\ \alpha}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$PL_n = x_1^n + x_2^{-n} = M^n - M^{-n} = e^{n\alpha} - e^{-n\alpha} = 2sh\ n\alpha, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$PL_n = x_1^n + x_2^{-n} = M^n + M^{-n} = e^{n\alpha} + e^{-n\alpha} = 2ch\ n\alpha, \qquad n = \ 2, 4, 6, \ldots$$

Из формул чисел Пелля и Пелля-Люка следуют гиперболические функции:

$$\text{ch}\ n\alpha = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{\alpha n} - e^{-\alpha n}}{2} = \frac{M^n + M^{-n}}{2} = \frac{P_n\sqrt{8}}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\text{sh}\ n\alpha = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{n\alpha} - e^{-n\alpha}}{2} = \frac{M^n + M^{-n}}{2} = \frac{P_n\sqrt{8}}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$\text{ch}\ n\alpha = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{n\alpha} - e^{-n\alpha}}{2} = \frac{M^n + M^{-n}}{2} = \frac{P_n\sqrt{8}}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\text{ch}\ n\alpha = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{e^{n\alpha} - e^{-n\alpha}}{2} = \frac{M^n + M^{-n}}{2} = \frac{P_n\sqrt{8}}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

а также гиперболические последовательности функций типаа Пелля и Пелля- Люка:

$P_1\sqrt{8}$	PL_2	$P_3\sqrt{8}$	PL_4	$P_5\sqrt{8}$
2(ch 1α	**ch 2α**	**ch 3α**	**ch 4α**	**ch 5α …)**
2,828	6	14,142	34	82,024

PL_1	PL_2	PL_3	PL_4	PL_5
2(sh 1α	**sh 2α**	**sh 3α**	**sh 4α**	**sh 5α …)**
2	5,686	14	33,890	82

$P_1\sqrt{8}$	$P_2\sqrt{8}$	$P_3\sqrt{8}$	$P_4\sqrt{8}$	$P_5\sqrt{8}$
2ch 1α	**2sh 2α**	**2ch 3α**	**2sh 4α**	**2ch 5α …,**
2,828	5,656	14,138	33,890	82,096

PL_1	PL_2	PL_3	PL_4	PL_5
2sh 1α	**2ch 2α**	**2sh 3α**	**2ch 4α**	**2sh 5α …**
2	6	14	34	82

При $n\gamma > 5$ обе функции практически совпадают

$$\text{sh } n\alpha = \text{ch } n\alpha \; = \frac{1}{2} e^{n\alpha} .$$

и их отношения:

$$\frac{sh(n+1)\alpha}{shn\alpha} = \frac{ch(n+1)\alpha}{chn\alpha} = e^{\alpha} \;= M = 2{,}414.$$

Заключение

Рекуррентные последовательности чисел типа Пелля (2) можно представит следующими гиперболическими функциями:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
2(ch 1α	**sh 2α**	**ch 3α**	**sh 4α**	**ch 5α …)**
2(1	2	5	12	29 …)

PL_1	PL_2	PL_3	PL_4	PL_5
2(sh 1α	**ch 2α**	**sh 3α**	**ch 4α**	**sh 5α …)**
2	6	14	34	82

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
sh 1α	**ch 2α**	**sh 3α**	**ch 4α**	**sh 5α …**
1	3	7	17	41

$P_1\sqrt{8}$	PL_2	$P_3\sqrt{8}$	PL_4	$P_5\sqrt{8}$
2(ch 1α	**ch 2α**	**ch 3α**	**ch 4α**	**ch 5α …)**
2,828	6	14,142	34	82,024

Рекуррентные последовательности чисел типа Пелля можно представит следующими гиперболическими функциями:

PL_1	PL_2	PL_3	PL_4	PL_5
2(sh 1α	**sh 2α**	**sh 3α**	**sh 4α**	**sh 5α …)**
2	5,686	14	33,890	82 **…**

Гиперболические функции синус и косинус чисел равны:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
sh $n\alpha$	1	2,828	7	16,970	41	98,992	239	576,982
ch $n\alpha$	1,414	3	7,063	17	40,926	99	238,996	577

Полученные последовательности гиперболических функций образуются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\text{sh } n\alpha = \text{ch } (n-1)\alpha + \text{sh } (n-2)\alpha, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$
$$\text{ch } n\alpha = \text{sh } (n-1)\alpha + \text{ch } (n-2)\alpha, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Гиперболические функции могут быть представлены также формулами:

$$\text{sh}\, n\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[sh(n+1)\alpha + sh(n-1)\alpha\right], \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$

$$\text{ch}\, n\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[ch(n+1)\alpha + ch(n-1)\alpha\right], \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Полученные последовательности рекуррентных чисел, формулы и соотношения, взаимосвязанные с гиперболическими функциями, позволяют значительно расширить полигон исследования свойств чисел золотого сечения, их связи с гиперболическими последовательностями чисел типа Фибоначчи, Пелля и Люка [1, 2, 3], электрическими моделями рекуррентных последовательностей чисел и др. [4]**.**

Литература

1. Семенюта, Н. Ф. Гиперболические функции последовательностей чисел Фибоначчи и Люка // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.27322, 10.09.2021.

2. Семенюта, Н. Ф. О взаимосвязи золотого сечения и гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.25565, 07.07.201967, публ.25261, 12.03.2019.

3. Семенюта, Н. Ф. Об уравнениях «золотого» сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.25261, 12.03.2019.

4. Семенюта, Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоничное развитие систем – третий путь человечества. – Одесса: ООО Институт креативных технологий, 2011. – С. 87–93.