

ЗОЛОТЫЕ ПРОПОРЦИИ В АРБЕЛОСЕ. Часть 1

Введение

Арбелос – криволинейный треугольник, ограниченный тремя касающимися друг с другом полуокружностями с коллинеарными центрами. Напоминает очертания сапожного ножа, от названия которого на греческом и произошло это слово.

Это одна из наиболее интереснейших геометрических фигур, изучаемых многими геометрами ещё с античных времен, из-за её красивых свойств.

Так, в работе [1] доказано несколько теорем о золотых пропорциях в арбелосе общего вида. Геометрические построения отличаются оригинальностью. Однако они чрезмерно перегружены, тяжелы для визуального восприятия и с трудом поддаются отслеживанию доказательной линии. Кроме того, ряд необходимых условий оказываются избыточными, поскольку логично вытекают из основных построений.

Целью настоящей статьи является новое изложение золотой пропорции в арбелосе общего вида, с выработкой единой концептуальной линии и последовательно-доказательного анализа. Одновременно исследуем особенности, которые привносит золотой арбелос.

Исходные положения

На прямолинейном отрезке AB , как на диаметре, построим полуокружность \widehat{O} . Дужка сверху отличает кривую от её центра – точки O .

Из произвольной точки $C \in AB$ восстановим перпендикуляр $CD \perp AB$ (рис. 1).

Ремарка. Многие авторы предпочитают располагать точку C правее от центра O .

Тогда удобнее обозначить длину отрезка $AC = b$ (*big* – большой), – получается наглядно и легко удерживается в памяти. Соответственно $BC = a$ и $AB = c = a + b$.

Так же как физики договорились и условно присвоили электрону отрицательный заряд.

Но могли бы иначе: наделить его положительным (позитивным) признаком, ведь бедолага крутится-трудится больше всех на свете. А трутни-протоны "восседают" себе лениво и припеваючи в центре, зато с большущим плюсом.

Точь-в-точь, как в политической системе «власть – народ».

С давних времен хорошо известно среднегеометрическое значение $DC = \sqrt{ab}$.

Традиционным является и деление отрезка DC золотым сечением путем проведения двух дуг 1 и 2, начина с его середины (рис. 1):

$$\frac{DC}{DG} = \frac{DG}{CG}.$$

На отрезках a , b можно провести свои полуокружности, получится фигура – арбелос.

В общем случае на линии DC можно построить разные варианты золотой пропорции в увязке с характерными линиями и окружностями арбелоса.

Либо в обратном порядке, проводя в определенной последовательности геометрические фигуры в арбелосе, построить золотые сечения, в том числе на разделительной линии DC .

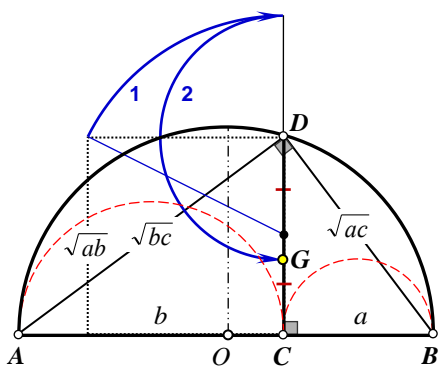


Рис. 1. Среднегеометрическое $DC = \sqrt{ab}$ и его золотое сечение $G = g(DC)$

Нам понадобятся общие касательные к двум окружностям.

Вещь несложная, но для наглядности и удобства последующего изложения представим. Даны две окружности радиусами R, r и расстоянием между центрами d (рис. 2)

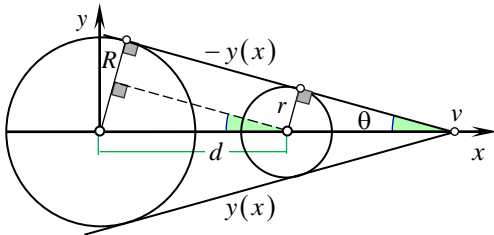


Рис. 2. Общие касательные к двум окружностям

Обозначим синус угла $s = \sin \theta = \frac{R-r}{d}$.

Угловой коэффициент равен $\operatorname{tg} \theta = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$.

Касательная пересекает ось абсцисс в точке $v = R/s$.

В системе координат рисунка 2 уравнение общей касательной принимает вид:

$$y(x) = \operatorname{tg} \theta \cdot (x - v) = \frac{sx - R}{\sqrt{1-s^2}}$$

Для дальнейшего анализа введем следующие обозначения:

$\hat{O}(A)$ – окружность (дуга) с центром в точке O , проходящая через точку A , при этом допускается перечисление в скобках других возможных точек, OA – радиус окружности;

$P(AB, CD, \dots)$ – точка на пересечении прямых AB, CD и возможно других фигур, указанных в скобках, включая иные прямые и окружности; скобки могут быть опущены;

$S = g(AB)$ – операнд золотого (*gold*) сечения прямолинейного отрезка $AB = AS + SB$ в точке S с выполнением золотой пропорции $\frac{AB}{AS} = \frac{AS}{SB} = \Phi$, где $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ – константа золотого сечения, точки A и B – границы соответственно большего и меньшего отрезков.

Формализация арбелоса и базовые отношения

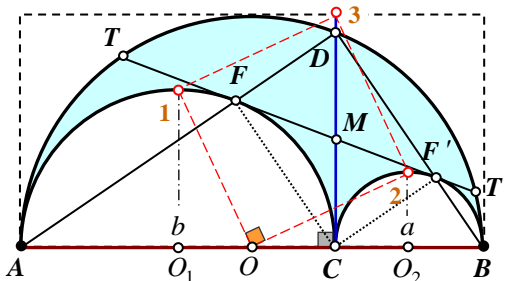


Рис. 3. Геометрическая фигура арбелоса $Ar = Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$

На диаметре AB полуокружности $\hat{O}(A)$ выберем произвольную точку C , и на отрезках $AC = b$, $CB = a$, как на диаметрах, проведем полуокружности $\hat{O}_1(A), \hat{O}_2(B)$. Три полуокружности образуют геометрическую фигуру – арбелос (рис. 3).

Из точки C восстановим перпендикуляр $CD \perp AB$.

Через точки $F(AD, \hat{O}_1), F'(BD, \hat{O}_2)$ проведем прямую, которая пересекает окружность \hat{O} в точках T, T' и отрезок CD в точке M .

Арбелос вместе с основными линиями будем обозначать $Ar = Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$, где литера r (*radius*) одновременно символизирует наличие в фигуре окружностей.

По построению $CFDF'$ – прямоугольник, точка M (*middle*) делит его диагонали пополам; $O132$ – квадрат со стороной $\sqrt{a^2 + b^2} / 2$.

Лемма 1. В арбелосе $Ar = Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$ прямая FF' – внешняя касательная к двум окружностям \hat{O}_1, \hat{O}_2 , отрезки, исходящие из точки D , равны $DT = DT' = DC = \sqrt{ab}$ (рис. 4).

Поскольку $CFDF'$ прямоугольник, то выделенные (зеленым) углы равны, значит FF' – касательная к \hat{O}_1 . Таким же образом FF' – касательная к \hat{O}_2 , то есть она совпадает с TT' .

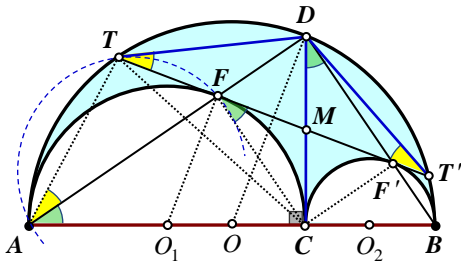


Рис. 4. Внешняя касательная TT' к окружностям \hat{O}_1, \hat{O}_2 в арбелосе

Из свойств гомотетии (подобия) в окружностях \hat{O}, \hat{O}_1 относительно точки их касания A следует параллельность $DO \parallel FO_1$. Из чего получается перпендикулярность $DO \perp TT'$, а следом равенство $DT = DT'$ в сегменте круга \hat{O} , ограниченном хордой TT' , то есть $\triangle DTT'$ – равнобедренный.

Выделенные (желтым) углы равны, так как опираются на равные дуги, следовательно, DT – касательная к описанной окружности $\triangle ATF$.

По теореме о касательной и секущей $DT^2 = DF \cdot DA = DC^2 = ab$.

Таким образом, имеем базовое равенство: $DT = DT' = DC = \sqrt{ab}$. Лемма доказана.

Первое золотое сечение в арбелосе

Рассмотрим $Ar(\hat{O}, \hat{O}_1, \hat{O}_2)$ и обозначим вспомогательные параметры (рис. 5):

$k = \sqrt{ab}/c$ – угловой коэффициент (тангенс угла наклона) диагонали AE прямоугольника размером $AB \times CD$;

$d = \sqrt{ab + c^2} = c\sqrt{1 + k^2}$ – длина диагонали AE .

Лемма 2. Пусть $F(AD, \hat{O}_1)$, $N(BF, \hat{O}_1)$ и $N'(AE, \hat{O}_1)$, тогда $N \equiv N'$ и $CN \perp AE$.

Другими словами, N – узловая (nodal) точка, в которой пересекаются окружность \hat{O}_1 и две прямые AE и BF под прямым углом.

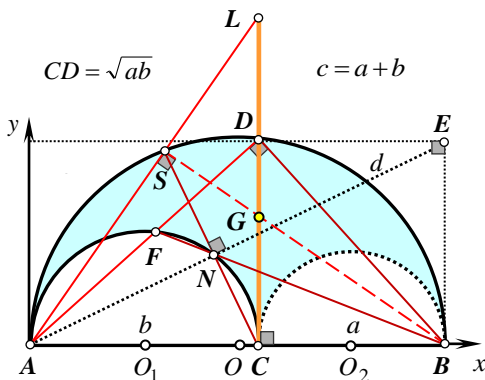


Рис. 5. Первое золотое сечение в арбелосе: $G = g(CD) = g(LC)$

По теореме о касательной и секущей (из точек D и B к окружности \hat{O}_1) и теореме Пифагора для $\triangle DBF$:

$$DF = \frac{DC^2}{DA} = \frac{ab}{\sqrt{bc}};$$

$$BF = \sqrt{DF^2 + BD^2} = \sqrt{a(ab + c^2)}/c = d\sqrt{a/c};$$

$$BN = \frac{BC \cdot BA}{BF} = \frac{\sqrt{ac^3}}{d}.$$

Найдем координаты (x, y) точки $N(BF, \hat{O}_1)$:

квадрат модуля $BN^2 = (c - x)^2 + y^2$ или

$$x^2 + y^2 = ac^3/d^2 - c^2 + 2cx;$$

$$x^2 + y^2 = bx;$$

приравниваем суммы квадратов и определяем координаты точки N в комплексной форме $N = \frac{bc}{ab + c^2}(c + i\sqrt{ab}) = \|(\cdot)/c^2\| = \frac{b + i \cdot kb}{1 + k^2}$, которая применяется только для удобства записи и не несет никакой дополнительной математической нагрузки

Найдем координаты (x, y) точки $N'(AE, \hat{O}_1)$ при пересечении диагонали $AE(x) = kx$ и полуокружности \hat{O}_1 : $bx - x^2 = (kx)^2 \rightarrow x = \frac{b}{1 + k^2}, y = \frac{kb}{1 + k^2}$, то есть точки N, N' совпадают, а значит, и $CN \perp AE$. Лемма доказана.

Практический аспект. В виду малости расстояния между точками, хорда FN слабо различима на фоне окружности. Приемлемо-точное местоположение точки N , как пересечение окружности \widehat{O}_1 и прямой BF , реалистично определить в очень большом масштабе либо на компьютере. Установленная леммой закономерность позволяет легко выполнить данную операцию обычными методами (под линейку) путем проведения диагонали d . При этом точка F становится необязательной для построения. Идем дальше...

Теорема 1. Если в арбелосе $Ar = Ar(\widehat{O}, \widehat{O}_1, \widehat{O}_2)$ последовательно построены точки $N(BF, AE, \widehat{O}_1) \rightarrow S(CN, \widehat{O}) \rightarrow G(BS, CD) \vee L(AS, CD)$, то $G = g(CD) = g(LC)$.

Определим координаты (x, y) точки S при пересечении прямой $CN(x) = (b-x)/k$ и \widehat{O} -полуокружности $x^2 + y^2 = cx$:

$$(b-x)^2/k^2 = cx - x^2 \rightarrow (1+k^2)x^2 - (2b+ck^2)x + b^2 = 0;$$

$$x = \frac{b-ck^2\phi}{1+k^2} = \frac{c}{1+\Phi^2\delta} \rightarrow S = c \frac{1+i \cdot \Phi \sqrt{\delta}}{1+\Phi^2\delta},$$

где $\delta = a/b$, а два разных представления x следуют из тождества $(\Phi^2 = 1 + \Phi)$:

$$\begin{aligned} (1+\Phi^2\delta)(b-ck^2\phi) &= b-ck^2\phi + \Phi^2a - ck^2\delta\Phi = b - \frac{ab}{c}\phi + (1+\Phi)a - \frac{a^2}{c}\Phi = \\ &= c + \Phi a \left(1 - \frac{a}{c}\right) - \frac{ab}{c}\phi = c + \frac{ab}{c} = c(1+k^2). \end{aligned}$$

Уравнение прямой $AS(x) = \Phi\sqrt{\delta} \cdot x$, тогда $CL = AS(b) = \Phi\sqrt{\delta} \cdot b = \Phi \cdot CD$.

Поскольку $BS \perp AS$, то $BS(x) = \frac{\phi}{\sqrt{\delta}}(c-x)$ и $CG = BS(b) = \phi\sqrt{ab} = \phi \cdot CD$.

Теорема доказана.

Таким образом, движение по маршруту $\langle A \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow S \rightarrow A \vee B \rangle$ обязательно проходит через точку G "двойного" золотого сечения.

То есть, для любых двух окружностей $\widehat{O}, \widehat{O}_1$, касающихся внутренним образом, описанный маршрут заканчивается золотым сечением. К кругу \widehat{O}_2 можно даже не обращаться, равно как и вписанной окружности в треугольник $\Delta SCS'$ (см. ниже).

Эти фигуры становятся для построения вторичными и не влияют на поиск-доказательство золотого сечения.

Заметим, что используемые нами методы аналитической геометрии выгодно отличают и одновременно расширяют доказательную базу в работе [1].

Например, зная координаты характерных точек, мы легко находим, что углы наклона прямых SD, FG одинаковы и равны $\phi(\delta-\phi)/\sqrt{\delta}$, значит, они параллельны и $SDGF$ – трапеция, которая при $\delta = \phi$ превращается в прямоугольник.

При изменении отношения $\lambda = b/c$ точки G и L перемещаются по эллипсам с эксцентриситетом, равным $\sqrt{\phi}$, только во втором случае его фокусы лежат на вертикальной линии, проходящей через точку O .

Идем дальше. *Step by step...* Перейдем непосредственно к арбелосу.

Радиус вписанной окружности равен ($d = \sqrt{ab + c^2}$ – длина диагонали AE):

$$r = CG \cdot \sin(\angle SCD) = CG \cdot \sin(\angle E'AB) = CG \cdot \sqrt{ab}/d = \phi \cdot ab/d.$$

Радиус внеписанной окружности с центром в L : $R_c = \Phi^2 r = \Phi \cdot ab/d$.

С целью лучшего восприятия и анализа общих положений, на рисунке 7 приведены результаты компьютерной графики для нескольких вариантов построений при разных значениях отношений $\lambda = b/c$ между диаметрами полуокружностей \hat{O}_1, \hat{O} .

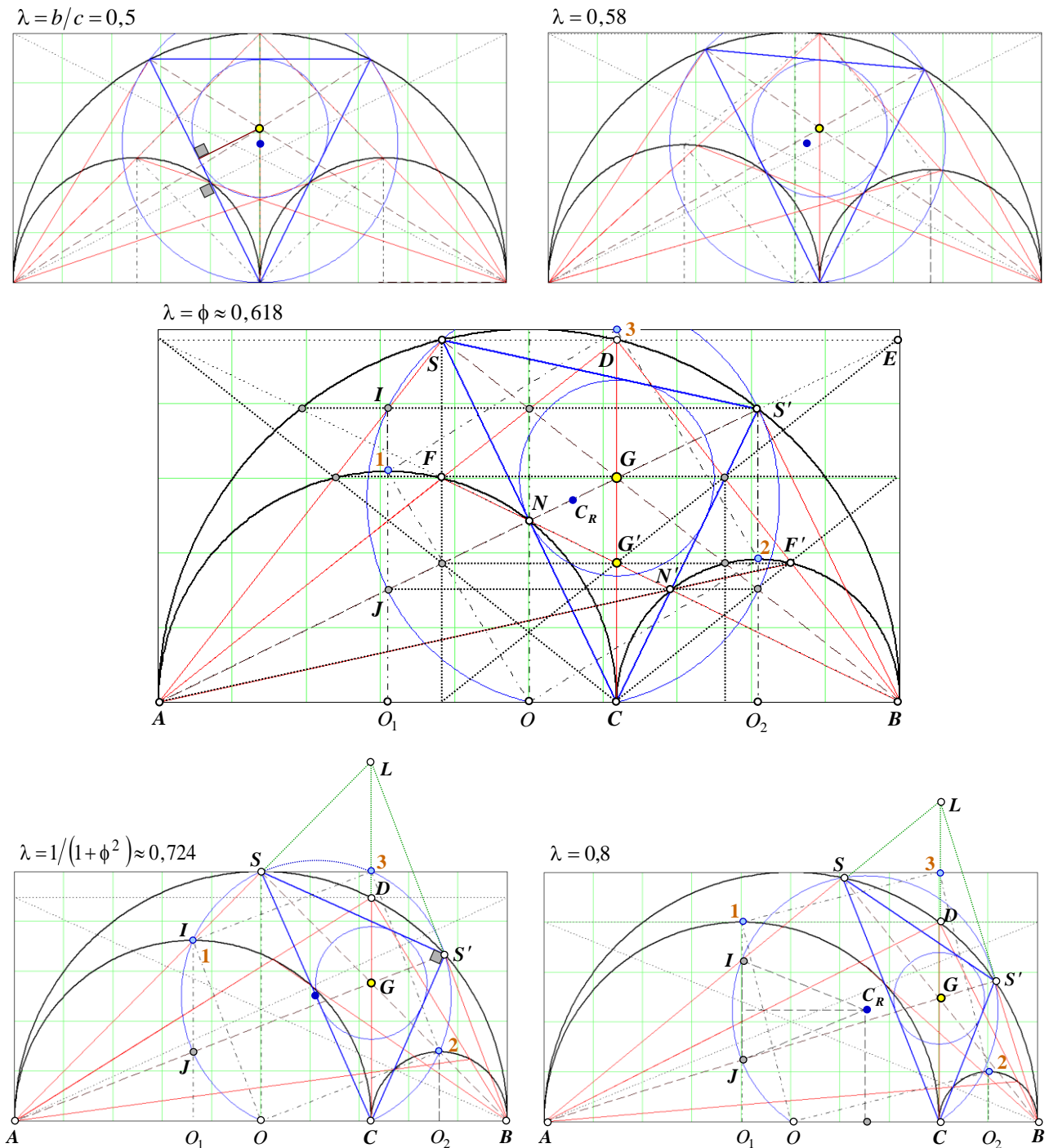


Рис. 7. Сравнение построений золотого сечения отрезка CD в арбелосах различных λ

При $a = b$ радиус $r = \phi^2 b / \sqrt{1 + \phi^2}$ и $\triangle SCS'$ – равнобедренный, у которого высота равна основанию.

Центр описанной окружности $\triangle SCS'$ находится в точке $C_R = \frac{c + 2b + i \cdot b \cdot \sqrt{5\delta}}{4}$.

Треугольники $\triangle C_R IJ$, $\triangle C_R OC$, $\triangle C_R O_1 O_2$ – равнобедренные при любом $\delta = a/b$.

Абсцисса лежит на середине отрезка OC и равна $\frac{c}{2} + \frac{b - c/2}{2}$. Ордината определяется серединой отрезка IJ , концы которого являются точками пересечения прямых $AS(x) = \Phi \sqrt{a/b} \cdot x$ и $AS'(x) = \phi \sqrt{a/b} \cdot x$ с прямой $y = b/2$, проходящей через центр \hat{O}_1 .

Отсюда находим радиус описанной окружности $R = \sqrt{(b - a)^2 + 5ab}/4$.

Как видим из рисунка 7, золотой арбелос ($c/b = b/a = \Phi$) отличается красивой графикой, обусловленной золотыми пропорциями, которые вносят в геометрический объект свою неповторимую гармонию. Рассмотрим его детальнее.

Золотой арбелос

Золотой арбелос имеет дополнительные эффектные свойства.

Прежде всего, образуются четыре равнобедренных треугольника:

$$\triangle ABN, \triangle ABL, \triangle SCS' \text{ и } \triangle BCS', \quad AB = AL = c, \quad S'S = S'C = S'B = \phi/\sqrt{2}.$$

$\triangle SCS'$ становится равнобедренным только при двух значениях λ : 0,5 и ϕ .

На наш взгляд, наиболее гармоничной фигурой на общем фоне выделяется золотой арбелос, проявляя особую согласованность и сопряженность частей построения, даже в сравнении с симметричным вариантом $a = b$.

Точка N становится симметрично-узловой: расположена на оси большого центрального полукруга \hat{O} , лежит на пересечении отрезков BF , AS' и является точкой касания:

- 1) вписанной окружности \hat{G} и стороны CS ;
- 2) невписанной окружности к $\triangle SCS'$ с центром в A .

Точка N' – узловая точка пересечения окружности \hat{O}_2 и трех прямых: AF' , BF , CS' , и также точка касания невписанной окружности к $\triangle SCS'$ с центром в B . Угол $\angle CF'B = 90^\circ$.

Точка S' расположена точно над центром O_2 и является серединой отрезка BL , а также точкой касания правого близнеца Архимеда с внешней окружностью.

Трапеция $SDGF$ превращается в прямоугольник, составленный из двух прямоугольных треугольников Кеплера. Точно такой же прямоугольник образован в нижней части чертежа сторонами $G'C \times G'F'$.

Треугольниками Кеплера также являются: $\triangle BNS'$, $\triangle NN'C$, $\triangle NN'S'$.

На одной горизонтали лежат точки: F и G , значит, $F = g(AD)$; S и D , значит, $S = g(AL)$. Кроме того, $F' = g(DB)$.

Параметры $\triangle SCS'$ ($c = 1$, p – полупериметр, S_Δ – площадь):

$$(CS', SS', CS, p, S_\Delta, r, R) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\phi, \phi, 2\phi^2, 1, \phi^3 \sqrt{\frac{\phi}{2}}, \phi^3 \sqrt{\phi}, \frac{\sqrt{\phi}}{2} \right).$$

Он состоит из двух равных прямоугольных треугольников Кеплера: $\triangle NS'S$, $\triangle NS'C$.

При этом радиусы вневписанных окружностей равны:

$$\frac{\phi^2}{\sqrt{\sqrt{5}-1}} = \Phi^2 r, \quad \frac{\phi}{\sqrt{\sqrt{5}-1}} = \Phi^3 r.$$

Прямоугольный $\Delta SCS'$

Определим условия, при которых треугольник $\Delta SCS'$ – прямоугольный.

Угловые коэффициенты прямых CS' и SS' равны $\frac{1}{k} = \frac{c}{\sqrt{ab}}$ и $-\frac{b-a}{\sqrt{5ab}}$ соответственно.

Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1 :

$$\frac{c}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{5ab}}{b-a} \rightarrow b^2 - a^2 = ab\sqrt{5} \rightarrow \delta^2 + \sqrt{5} \cdot \delta - 1 = 0 \rightarrow \delta = \phi^2.$$

Тогда $\lambda = b/c = 1/(1+\phi^2)$ и $\delta = a/b = \phi^2$ (см. рис. 7).

Уравнение прямой $AL(x)$: $y = x$. Она проходит через наивысшие точки окружностей \hat{O}, \hat{O}_1 , $CL = b$, $CD = \phi \cdot b$, $CG = a$, $BS \perp AL$, $AS' \perp BL$, и четырехугольник $SLS'G$ вписывается в окружность с центром в точке K и радиусом KS .

Треугольник ΔADC – золотой, отношение его катетов равно $\Phi = \phi^{-1}$.

Описанная окружность $\Delta SCS'$ проходит через вершины квадрата $O123$ (исключительно в этом варианте!) и точку $J(AS', O_1I)$.

Отметим также, что появляется своеобразная связь вариантов $\delta = 1$ и $\delta = \phi^2$.

С учетом соотношений (1) параметры $\Delta SCS'$ ($c = 1$) равны:

$$(CS', SS', CS, p, S_{\Delta}, r, R) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}, \frac{\Phi}{\sqrt{5}}, \frac{1}{10}, \frac{\phi}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{8} \right), & \delta = 1; \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \left(2, \sqrt{5}, 3, 2 + \Phi, \frac{1}{\sqrt{6}}, \phi, \frac{3}{2} \right), & \delta = \phi^2. \end{cases}$$

В первом варианте диаметр вписанной окружности равен a второго варианта $\frac{\phi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{1+\Phi^2}$.

Высота равнобедренного треугольника $\Delta SCS'$ в первом варианте равна CD второго.

Точка S' в первом случае совпадает с точкой D второго, а точка D первого – с точкой S второго.

Частое появление в нашем рассмотрении треугольника Кеплера наталкивает на мысль проверить – не является ли $\Delta SCS'$ таковым.

Отношение катетов составляет $\sqrt{5}/2$, меньшего катета к гипотенузе – $2/3$, то есть это не треугольник Кеплера.

Пропорция $\sqrt{5}/2$ характерна для архитектуры Древнего Египта.

Так, этой величиной выражается (рис. 8):

- отношение высоты к ширине погребальной камеры фараона в Великой пирамиде [2];
- длина кратчайшего отрезка, необходимого для деления единичного квадрата на 4 равновеликие части, если все отрезки начинаются в одной вершине квадрата.

Угол $\theta = \arccos 2/3 \approx 48,19^\circ$ также имеет любопытные проявления, обусловленные его тесной связью с золотым сечением, например (рис. 8):

- маленький шарик, уподобленный точке и помещённый на вершину большой неподвижной сферы, скатывается без трения по поверхности до тех пор, пока не оторвется от неё под углом θ [4], – такой угол описывает на циферблате минутная стрелка за ~ 8 минут;
- 24 остроугольных равнобедренных треугольника с углом при основании θ образуют тетракисексаэдр (4×6 граней) или преломленный куб – полуправильный многогранник (каталаново тело), двойственный усеченному октаэдру;
- для двух одинаковых и произвольно (случайным образом) ориентированных кубов в пространстве, максимально возможное значение наименьшего острого угла (из девяти) между парами ребер равно θ .

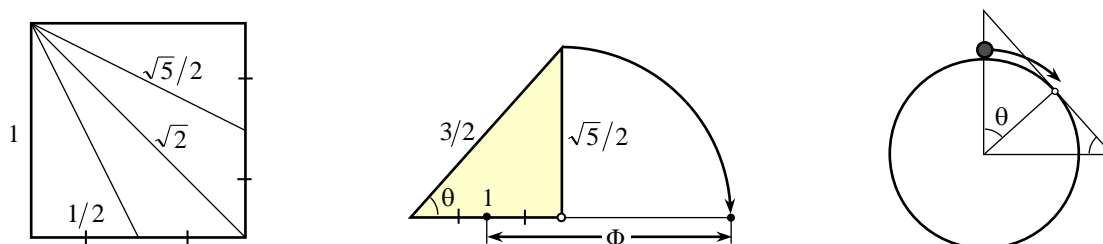


Рис. 8. Иллюстрация свойств, характерных для прямоугольного треугольника $\Delta SCS'$

Последнее минимаксное свойство угла $\theta = \arctg(\phi + 1/2)$ в большой мере обязано яркому проявлению золотой пропорции в задачах на экстремум, играя важную роль в теории рекристаллизации, структурировании живого вещества и т.п.

To be continued...

Литература:

1. Nguyen Ngoc Giang, Le Viet An. Golden sections and Archimedean circles in an Arbelos // International J. of geometry. 2018, 7(2), 25-36. – <https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2018/10/25-36.pdf>.
2. Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе. Историко-математические исследования, 13(48), 2009, с. 198-216.
3. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 12. Обобщенная модель золотого роста // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28412, 01.04.2023. – <https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165283.htm>.
4. V. Jayanth, C. Raghunandan, A.K Biswas. A sphere moving down the surface of a static sphere and a simple phase diagram / Cornell University, 26 Aug 2008. – <https://arxiv.org/abs/0808.3531>.

© Василенко (Украина, г. Харьков),
Ковалев (РФ, г. Санкт-Петербург)

2023 