С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 14. Гармоничное сочетание квадратов

Гармония – это сочетание противоположностей
Аристотель

Вместо вступления.

Квадрат вкупе с золотым сечением продолжают открывать свои неповторимые свойства гармонии.

Особенно хорошо они смотрятся в сочетании с другими квадратными формами.

В работе [1] рассмотрен простой пример наложения двух квадратов в результате вращательного движения одного из них вокруг общей вершины и нахождения площади их пересечения (общей части). Приведенное описание частого решения малоинтересно.

Более значимой, конечно, является общая постановка геометрической задачи, с последующим выходом на золотое сечение.

Тем более что предложенный способ нахождения площади фигуры экстравагантен, но не эффективен. Вместо простого подхода, автор синтезирует математический купаж: координатный метод, определение аналитических функций, интегрирование.

Да простят меня вечно стоящие в позе кобры оппоненты, но невольно возникают параллели-ассоциации с использованием осколочной гранаты для уничтожения тараканов в квартире. Или грибоедовское «горе от ума».

Как говорил еще Экклезиаст, большие знания – великие печали: «во многой мудрости много печали; и кто умножает познания, умножает скорбь» (Еккл. 1:18).

Профессор Michael Penn – незаурядный новатор-популяризатор математики. – Полагаем, на критические замечания «умные не обижаются, а делают выводы» (А. Кристи).

Математический аспект задачи.

Два одинаковых квадрата $q \times q$ с общей вершиной D повернуты относительно друг друга на угол α (рис. 1).

В результате наложения фигур образуется прямоугольный дельтоид $AGFD$ со сторонами q и $a = q\,\mathrm{tg}\,\theta$, где $\theta = \dfrac{\pi/2 - \alpha}{2}$. Его площадь равна $s = q^2\,\mathrm{tg}\,\theta$.

Положим, например, $q = 12$, $\alpha = 30^\circ$, получаем $\theta = 30^\circ$, $s = 12^2/\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

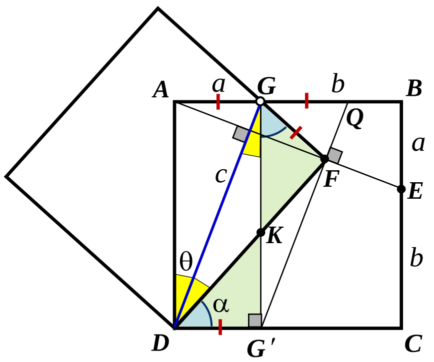


Рис. 1. Наложение двух квадратов с общей вершиной D

Собственно и всё решение задачи [1]. – Ничего лишнего. Если есть желание потренироваться и/или блеснуть знаниями, можно перейти к интегральному исчислению. У нас другие планы...

Опустим перпендикуляр $GG' \perp CD$.

Прямоугольные треугольники равны $\Delta\, KGF = \Delta\, KG'D$ (по катету и прилежащему острому углу).

Треугольники $\Delta\, KGD$, $\Delta\, KG'F$, $\Delta\, GQF$ – равнобедренные, $FG' \parallel GD$.

Далее примем без потери общности единичные квадраты $q = 1$.

Тогда численно $a = s = \mathrm{tg}\,\theta$.

"Золотая" гармония квадратов.

1) Найдем условие, при котором равны три отрезка (рис. 2) $FE = z$ или $c = 3z$:

$$c^2 = 1 + a^2, \quad z = a \cdot \cos\theta = a/c, \qquad c = 3z;$$

$$1 + a^2 = 3a \;\rightarrow\; a = \phi^2, \;\; \phi = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2 = \Phi^{-1}.$$

Определим другое условие равенства отрезков $x = x'$:

$$x = 1 - 2a, \quad x' = b \cdot \mathrm{tg}\,\theta = (1 - a) \cdot a;$$

$$x = x' \;\rightarrow\; a^2 - 3a + 1 = 0 \;\rightarrow\; a = \left(3 - \sqrt{5}\right)/2 = \phi^2.$$

Значит, $QQ' \perp CD$ и $EQ' \parallel GD$.

Таким образом, золотое сечение стороны квадрата $a = s = \phi^2 \;\rightarrow\; \theta = 20{,}91^{\circ}$ вносит в геометрическое построение дополнительную гармоничность.

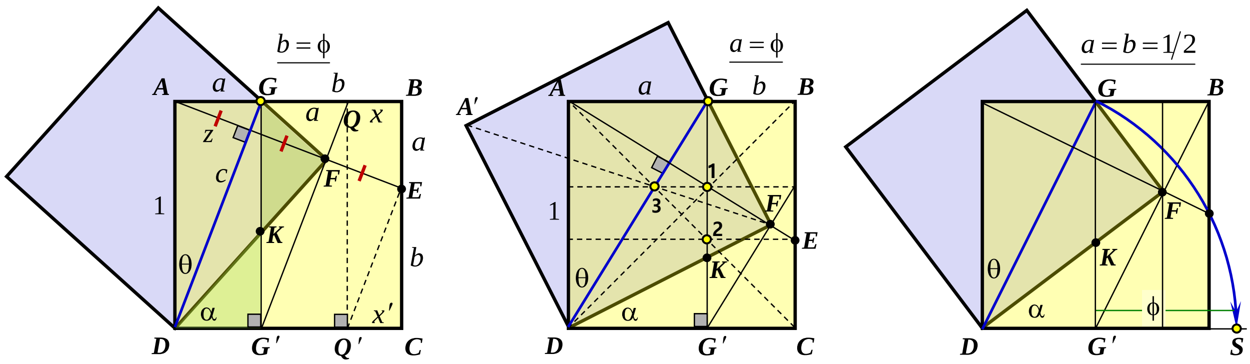


Рис. 2. Взаимное расположение двух квадратов при различных значениях b

2) Положим теперь $a = s = \phi \;\rightarrow\; \theta = 31{,}72^{\circ}$.

Расположение фигур стало более гармоничным.

Нетрудно показать, что точки 1, 2, 3 являют золотые сечения отрезков:

$$1 = g(G'G) = g(DB) = g(AE);$$

$$2 = g(GG') = g(AC) = g(C3);$$

$$3 = g(DG) = g(CA) = g(FA').$$

3) Пусть $a = b = 1/2 \;\rightarrow\; \theta = 26{,}57^{\circ}$.

Расположение точек K, F и их проекций напоминает золотые отношения.

Но следует обязательно проверить:

$$KG' = KF = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{\mathrm{tg}\,(\pi/2 - 2\theta)}{2} = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{tg}\,2\theta} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\theta}{2 \cdot 2 \cdot \mathrm{tg}\,\theta} = \frac{1 - 1/4}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375; \qquad DK = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

То есть золотые отношения не наблюдаются.

Зато присутствует прямоугольный треугольник $\Delta\, DKG'$ и ему подобные, с отношением сторон $3:4:5$, как в египетском треугольнике.

Для получения золотого отношения диагональ DG прямоугольника $1 \times 0{,}5$ можно перевести на горизонтальную ось: $G'S = \phi$.

Прямоугольные треугольники: египетский и Кеплера.

Позволим краткий экскурс для освещения-уточнения одного дополнительного вопроса.

В последнем примере фигурируют числа Фибоначчи $F_4 \div F_6$: 3, 5, 8 = 3 + 5, которые формируют прямоугольный египетский треугольник с целочисленными сторонами наипростейшей пифагоровой тройки (3, 4, 5).

С другой стороны, отношение соседних чисел Фибоначчи дает приближение золотой константы $3/5 \approx 5/8 \approx \phi$. И чем больше эти числа, тем лучше аппроксимация.

Точное золотое отношение сторон присутствует в прямоугольном треугольнике Кеплера со сторонами $\phi : \sqrt{\phi} : 1$ (рис. 3).

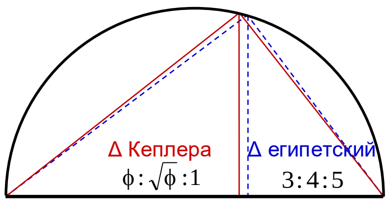


Рис. 3. Сопоставление треугольников

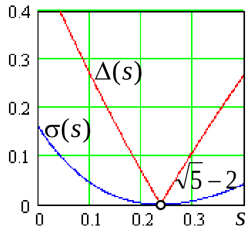


Рис. 4. Отклонения от золотого отношения

Других трех последовательных чисел Фибоначчи, воссоздающих подобие египетского треугольника, нет.

Но могут быть другие пифагоровы тройки вида $(A, B, C) = \left(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2\right)$, где $m > n$ – взаимно простые числа.

По аналогии с выражением $3/5 \approx 5/(3+5) \approx \phi$ определим для таких троек абсолютное Δ и квадратичное σ отклонения от золотого отношения (рис. 4):

$$\Delta(s) = \left|\phi - \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right| + \left|\phi - \frac{m^2 + n^2}{2m^2}\right| = \left|\phi - \frac{1-s}{1+s}\right| + \left|\phi - \frac{1+s}{2}\right|, \quad s = \left(\frac{n}{m}\right)^2;$$

$$\sigma(s) = \left(\phi - \frac{1-s}{1+s}\right)^2 + \left(\phi - \frac{1+s}{2}\right)^2.$$

Эти функции обращаются в нуль при $s = \sqrt{5} - 2 \ \rightarrow\ (n/m)^2$. Задавая натуральное число $m \geq 2$, и вычисляя целое значение $n \approx m\sqrt{\sqrt{5} - 2}$, находим пифагоровы тройки.

Например, $\underline{m = 2,\ n = 1}$:

$$(A \quad B \quad C) = (3 \quad 4 \quad 5), \quad \phi - \frac{A}{C} = 0{,}018; \quad \phi - \frac{C}{A+C} = -0{,}007;$$

$\underline{m = 103,\ n = 50}$:

$$(A \quad B \quad C) = (8109 \quad 10300 \quad 13109), \quad \phi - \frac{A}{C} = -0{,}00055; \quad \phi - \frac{C}{A+C} = 0{,}00021.$$

Понятно, чем больше числа *m*, *n*, тем точнее целочисленная пифагорова тройка будет воспроизводить треугольник Кеплера, при соответствующем масштабировании.

Но как видим (см. рис. 3), наипростейшая пифагорова тройка (египетский треугольник) хорошо корреспондируется с золотым кеплеровским треугольником.

На наш взгляд, этот примечательный факт нашел отражение в античном искусстве как способ пропорциональности, включая архитектуру.

Вторая задача. Общие построения и закономерности.

Задан единичный квадрат (*square*) *s*. Его стороны разделены на два отрезка 1 = *b* + *a*, последовательно от каждой вершины по часовой стрелке.

Через вершины квадрата и точки сопряжения отрезков проведены прямые $l_1 \div l_4$, которые при пересечении образуют центральный квадрат $s_1 = ABCD$ (рис. 5) со стороной q.

Его диагонали продолжены до пересечения со сторонами исходного квадрата. Соединяя точки пересечения, получаем квадрат s_3 (11-21-31-41) и четыре квадрата s_2.

Определим параметры по теореме Пифагора и подобию треугольников:

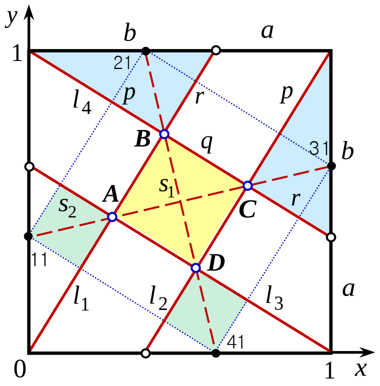


Рис. 5. Построение квадратов

$$\begin{cases} b^2 = p^2 + r^2, \\ \dfrac{1}{b} = \dfrac{p+q}{p} = \dfrac{p}{r} \rightarrow r = bp; \end{cases}$$

$$b^2 = p^2 + (bp)^2 \rightarrow p = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = bz, \quad \text{где} \quad z = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}};$$

$$r = b^2 z, \quad \frac{1}{b} = \frac{p+q}{p} \rightarrow q = \frac{a}{b} p = az;$$

$$(p \quad q \quad r) = z \cdot (b \quad a \quad b^2).$$

Уравнения линий: $l_1 : y = x/b$; $l_2 : y = (x-a)/b$;
$l_3 : y = -bx + b$; $l_4 : y = -bx + 1$.

Координаты точек: $A_x = D_y$, $B_x = A_y$, $C_x = B_y$, $D_x = C_y$;

$A: l_1 \cap l_3$; $B: l_1 \cap l_4$; $C: l_2 \cap l_4$; $D: l_2 \cap l_3$;

$$(A \quad B \quad C \quad D) = z^2 \cdot (b^2 + ib \quad b + i \quad 1 + i(1-ab) \quad 1 - ab + ib^2).$$

Угол наклона AC: $k = \dfrac{a}{1+b}$.

Квадраты: s_1, s_2, s_3, их диагонали d_1, d_2, $d_3 = d_1 + 2d_2$:

$$d_1 = az\sqrt{2}, \quad d_3 = \sqrt{1+k^2}, \quad d_2 = (d_3 - d_1)/2.$$

Анализ частных решений.

Наиболее репрезентативные частные случаи представлены на рисунке 6.

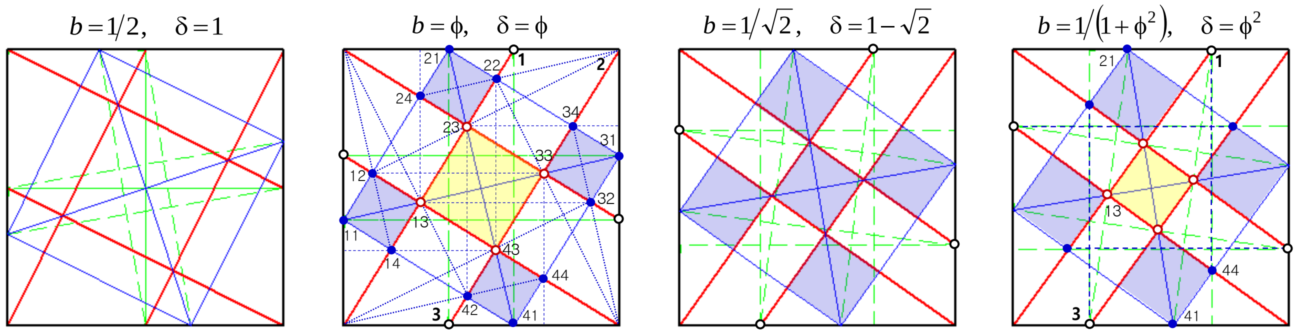


Рис. 6. Сравнение построений квадратов для различных значений *b*:
при $b = 1/\sqrt{2}$ квадрат s_3 включает 9 одинаковых квадратов $s_1 = s_2$

1. $\underline{b = a = 1/2}$; $\delta = a/b = 1$ – сторона центрального квадрата $s_1 = AB = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\phi + \Phi}$.

2. $\underline{b = \phi}$ $\approx 0,6180$; $\delta = a/b = \phi$ – золотое сечение, $AB_{/b=\phi} = \dfrac{1-\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = \dfrac{\phi^2}{\sqrt{1+\phi^2}}$:

- вершина исходного квадрата s и диагональ d_2 коллинеарные, например, 2-22-24;
- вершина квадрата s и две вершины квадратов s_2 коллинеарные, например, 2-23-12;
- каждая вершина квадрата s_1 находится на одной вертикали и горизонтали с двумя вершинами квадратов s_2, например, 23-34-42;
- каждая точка сопряжения отрезков a и b расположена на одной вертикали или горизонтали с удаленной вершиной квадрата s_3, например, 1-41;
- $d_1/d_2 = \Phi$;
- стороны квадратов s_1, s_2 образуют четыре золотых прямоугольника, например, 12-24-23-13; отрезав от него квадрат, мы получаем новый уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон 1:Ф.

Примечание: три точки $P_n = x_n + iy_n$, $n = \overline{1,3}$ коллинеарные (принадлежат одной прямой) тогда и только тогда, когда определитель матрицы равен нулю

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. $\underline{b = 1/\sqrt{2}}$ $\approx 0,70711$ – образуется девять одинаковых квадратов со стороной $\left(\sqrt{2}-1\right)/\sqrt{3} \approx 0,2391$. В их расположении и размерах ничего особенного.

Разве что на ум приходит любопытная арифметическая задачка по заполнению девяти квадратов неповторяющимися цифрами от 1 до 9:, причем с использованием всех арифметических действий

$$\boxed{5}\,\boxed{6} : \boxed{8} = \boxed{1} \times \boxed{7} = \boxed{9} - \boxed{2} = \boxed{3} + \boxed{4}$$

Зато значение $b = 1/\sqrt{2}$ имеет разные проявления:

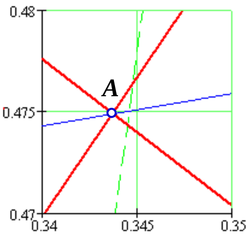
- радиус описанной сферы правильного октаэдра с единичными ребрами;
- радиус средней сферы (по касательной к ребрам) в кубе с единичными гранями;
- если длины сторон треугольника образуют гармоническую прогрессию в отношении $1 : \dfrac{1}{1+d} : \dfrac{1}{1+2d}$, то по условию неравенства d находится в диапазоне $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} < d < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
- $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, i – мнимая единица;
- в электротехнике отношение действующего (эффективного) значения переменного тока к его амплитуде;
- любопытные пределы Michael Penn [2, 3]:

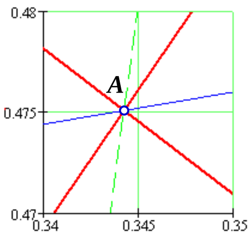
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2 - n}\right) = -1/\sqrt{2};$$

$$a_n = 1,\ 1/2,\ \frac{1/2}{3/4},\ \frac{1/2}{3/4} \Big/ \frac{5/6}{7/8},\ \ldots \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. $b = 1/(1+\phi^2) \approx 0{,}7236$; $\delta = a/b = \phi^2$ – данное золотое отношение хорошо проявило себя при рассмотрении золотой пропорции в арбелосе [4].

Здесь же довольствуемся только тем, что точка сопряжения отрезков a, b и вершина треугольника s_2 расположены на одной вертикали или горизонтали, например, 1-44.





Несмотря на кажущееся совпадение, точки сопряжения отрезков a, b и две вершины треугольников s_2 (например, 21-13-3) *не коллинеарные*.

Они коллинеарные при $b = x_1 \approx 0{,}72449$, где x_1 – положительный корень уравнения $x^4 + x - 1 = 0$.

Точно так же, вопреки визуальному восприятию, точка сопряжения отрезков a, b и две вершины треугольников s_2 (например, 21-41-1) *не образуют равнобедренный треугольник*, 21-41-3.

Равнобедренность достигается при $b = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73205$.

Значения достаточно близкие, но, увы, не в "зачетку" золотой константе.

Не всё коту масленица (Н.Островский). Плюс предостережение: любые констатации-выводы следует проверять и перепроверять.

Вместо заключения.

Понятие проверки (выяснения истинности, подлинности чего-либо) весьма любопытно и чрезвычайно важно, хотя, на удивление, не имеет общей теории и разнопланово рассредоточилось в разных направлениях-приложениях.

Со своими концептуальными положениями, спецификой, методами, тестами [5, 6].

Но ещё более поразительно то, что существуют целые пласты жизни, где проверка считается неуместной. Например, библейские персонажи ничего не проверяют. В библии даже слов похожих нет. Всё сказанное воспринимается на веру и носит догматический характер, обязательный для усвоения.

В науке и практике «единственным критерием истины является опыт» (Леонардо да Винчи). – Прочее тщетно и бесперспективно...

Вот с опытом как раз проблемы. Бог есть или бога нет – одинаково недоказуемые и непроверяемые гипотезы. Хотя усилия предпринимаются неимоверные.

Или взять различные шоу. Находятся люди с пластилином в голове, которые верят буквально всему, что вещают на подобных мероприятиях.

Хотя это обычное представление. Разговорное, зрелищное и т.п. Как в театре.

Некая "развлекаловка" постановочного характера. Когда зрелищно-художественная сторона превалирует над содержательной составляющей.

Расчет на броский внешний эффект. К реальной жизни и/или политике имеет отдаленное отношение.

Подобное свойственно и пропаганде, которая обращается не к реалиям, а человеческим эмоциям, теряя рациональную логику. Выдает оценки, а не факты. Делит мир на черное и белое. Одновременно рисует образы внешней угрозы. Несет элементы запугивания. Опирается на двойные стандарты. Словарь состоит из лозунгов и штампов.

Их основа и направленность – вера, чаще слепая, с признанием чего-либо истинным, независимо от аутентичного или логического обоснования.

Слова "вера" и "проверка" имеют один общий корень, главную значимую часть. Но они совершенно разные. Можно сказать, противоположные. А язык ещё больше обнажает и обостряет парадокс между ними.

Тот случай, когда установка «зри в корень» становится малопродуктивной, алогичной.

Приставка "про-" чаще всего обозначает направленность движения или действия <через предмет / мимо предмета> (просверлить, пролететь, ...), заполнение действием определенного промежутка времени (пробегать целый день), образует глаголы совершенного вида (прочитать, ...).

Но проверить можно только то, что поддается проверке. Вера не проверяема.

В английском языке для этого применяются разные слова: faith (вера, религия) и believ – верить, думать полагать.

А проверка имеет разные контексты-направленности: check, verify, review, ...

Всё что связано с верой и проверкой, в их нынешнем понимании, пришло в русский язык извне: церковь (круг, циркуль), чек, верификация, тестирование, вероятность и другие.

Собственных словообразований, связанных с верой, было мало. За ненадобностью.

Верность, доверие, достоверность, иноверец, завершение, верование, удостоверение, безверие, недоверие, вероломство... – Появились позже. Само слово – калька с др.-греч.

Религиозный смысл веры вообще появилось только в 18 веке [5]. А в 20 веке произошло окончательное разделение смысловых единиц, и лексема "вера" полностью утеряла значение "достоверности", что неминуемо отразилось на её философской трактовке.

Подлинность-обоснованность незаметно трансформировались в незрячую веру и рабски-покорное восприятие новостей во всём социально-политическом пространстве.

Качество колбасы стало интересовать больше, чем качество информации. А телевизор победил холодильник и не собирается сдавать свои позиции. С чем всех и поздравляем...

А я всё чаще замечаю,
Что меня как будто кто-то подменил.
О морях и не мечтаю…
Телевизер мне природу заменил (Кот Матроскин).

Надолго ли? – То и дело слышим одно, видим другое, думаем третье. Впору искать врача "ухо-глаз". – Окей!

Fronti nulla fides (наружность обманчива)...

To be continued...

Литература:

1. Michael Penn. An absurdist geometry problem / YouTube video, 2022. – https://www.youtube.com/watch?v=8HkzthxQ34k.
2. Michael Penn. A surprisingly convergent limit / YouTube video, 2022. – https://www.youtube.com/watch?v=i76d75nDiK4.
3. Michael Penn. The infinite fraction of your dreams (nightmare?) / YouTube video, 2022. – https://www.youtube.com/watch?v=Xk2LJsZA_MQ.
4. Василенко С.Л., Ковалев А.Н. Золотые пропорции в арбелосе. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28420, 07.04.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165291.htm.
5. Савицкая Т.В. Трансформация лексического значения языковых репрезентантов концептов "вера" // Казанская наука, 2013, № 2, 98-101. – https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18843972.
6. Горячев В. А. Классификация типов веры // Социально-экономические явления и процессы, 2012, 3, 166-169. – https://cyberleninka.ru/article/n/klassifikatsiya-tipov-very/viewer.