С.Л. Василенко

Бинарное отношение, дилогарифмы и золотые интегралы: диалектический подход

Да простят лирики наши
математические прегрешения

О бедной бинарности замолвите слово

В русском языке приставка ди- (от др.-греч. *дважды*) обычно имеет аналогичное значение *дважды, двойной*: диод, диполь, дифракция, дивергенция и т.д.

Эквивалентное латинское наречие (bis *два*) дает соответствующее начало слов "би-": биполярный, биквадратный, бинарный, ...

Оба префикса относятся к умножающим приставкам. Обозначают количество повторений понятия и лежат в основе многих терминов. Все они заимствованные, иностранного происхождения. Одновременно с ними вырабатывается система взглядов в предметной области, закрепляются новые идеи, экспортируются-копируются технологии.

Синтезаторы дефиниций формирует мировоззрение. – Более «реально существуют понятия вещей, а не сами вещи» (Платон).

Среди би- ди- терминов наибольшее прикладное распространение получил бинарный (двоичный) код, как способ представления данных посредством разрядного отображения одного из двух возможных значений, обычно обозначаемых цифрами 0 и 1. На переломе тысячелетий двоично-цифровое кодирование стало спутником и непреложным атрибутом в жизни человека: ЭВМ, интернет, смартфоны, телевидение, диагностика и проч.

Помнится, до появления калькуляторов и компьютеров, неизменным аналого-вычислительным устройством инженеров и ученых служила логарифмическая линейка: для умножения и деления чисел, извлечения корней и тригонометрических вычислений.

Однако жизнь не стоит на месте. Начиная с 1980-х годов, мощным рывком ворвалась цифровая революция, как повсеместный переход от аналоговых технологий к цифровым.

Появилось новое понятие *цифровой трансформации* ("цифровизация"), как внедрение современных технологий в различные сферы жизни. Создаются «цифровые министерства».

Конечно, не обходится без разных страшилок. Магический эффект дежавю. Раньше предавали анафеме прорывные знания в кибернетике и генетике. Сегодня нагоняют страху искусственным интеллектом и оцифровкой, апеллируя к традиционному мировоззрению, основанному на ресентименте и мифологических стереотипах. – Даже вбрасывают тезис: «Победа числа над "цифрой" неизбежна» (В.Кудрин). – Хотя в нашем представлении это созвучно победе слова над буквой, или безусловному триумфу курицы над яйцом...

Сдается, причина-следствие здесь трактуется с точностью до наоборот.

Достаточно рассмотреть цифры (знаки, символы) 0 и 1, которые без использования понятия числа образуют двоичный базис.

Приемлемы и другие условно-символьные бинарные интерпретации, представленные элементами всего двух видов: ложь-0 – истина-1, минус – плюс, мрак – свет, зло – добро.

«Да будет слово ваше: "да, да"; "нет, нет"; а что сверх этого, то от лукавого» (Мф, 5:37).

Оцифровка аналоговых объектов любой сложности осуществляется двоичными наборами-сочетаниями принятых двух символов. На их основе формируются растровые изображения, фотографии, текстовые материалы... И ни каких чисел. Лишь "забеги электронов" в проводящих средах: ринулся в одном направлении – 1; <магазин закрыт>, помчался в обратном – 0. Только успевай фиксировать, приближаясь к скорости света.

Даже если допустить гипотетическое существование гилетических чисел (по А.Лосеву), то их всего два: 0 и 1. Остальные – их производные, ибо любое число записывается с помощью двух (!) цифр, символов, букв.

В работах [1–3] показано, что для синтеза-представления неортодоксальной "формулы Бога" достаточно двух знаков посредством метафоричного по внешнему виду тождества "0 ≡ 1", которое обходится без чисел и свободно интерпретируется отношением двух знаков с их глубоко-объемлющим содержанием. Для ревностных адептов строгих формулировок, можно видоизменить на эквивалентные равенства с факториалом 0! = 1 или степенью $0^0 = 1$.

Не столь важно. Главное здесь – объединение нуля и единицы в единую конструкцию. Подобно неразличимым микрочастицам, корпускулярно-волновому дуализму и т.п.

Данную формулу Виктор Сахно структурно замещает и раскладывает на последовательность бинарных отношений [4] в виде категориального эйдоса А.Лосева:

«различие ↔ тождество ↔ становление ↔ ставшее ↔ проявление».

Нечто похожее наблюдаем в общефилософском измерении.

Так, гегелевская диалектика с её классической схемой имплементации «тезис + антитезис → синтез» по-прежнему актуальна, несмотря на тщетные усилия как-то принизить её и/или нивелировать, – мол, устарела (?).

И хотя в своей основе она последовательно-бинарная, на её основе создаются и к ней сводимы современные концепции троичного толка. Среди них триалектика (*trialectic*) французского философа Анри Лефевра (1974), триадология (всеобщая диалектика как триалектика) российского философа Елены Борзовой (2013), а также менее значимые производные симуляционного характера, которые выдвигаются с претензиями на научную системность, но не отвечают всеобщему закону достаточного основания.

Наличие-отсутствие различий многосторонне и достаточно убедительно раскрывает, например, Андрей Никитин [5] – российский соавтор по ряду совместных публикаций.

Все те, кто снисходительно и презрительно вкладывают в бинарное мышление негативный смысл, видимо, сами недалеко ушли от прямолинейного монизма. Буквально путаются в трех соснах, а простые и ясные вещи трансформируют в непроходимые джунгли и безвыходные лабиринты. Руководствуясь разумом и житейским опытом, просвещенные люди ещё в древности наставляли: настоящая мудрость не выставляет себя напоказ.

Провозглашается много стереотипных триад. Как данность. «Причем часто на уровне формальных манипуляций с числом "три", когда любую предметную комбинацию из трёх начинают причислить к проявлению триединства, доходя до абсурдно-комических ситуаций. Вроде голословно-формалистских объединений природа–социум–дух, материя–информация–мера, пространство–время–число и иного подобного винегрета» [6].

Возможно, подобно оперированию с логарифмами, сущностные триады призваны рационализировать философский анализ с раскладкой на более простые отношения.

Но учения о структурной логике триад, как целостных объектов взаимодействия, в реалиях как не было, так и нет. Видимо, за ненадобностью, ибо триады спокойно укладываются в диалектику Гегеля! Тем временем, сама философия всё больше погружается в виртуальное пространство. Оное отчасти понятно. Иначе за что присуждать ученые степени докторов философии? – Вопрос риторический.

Бинарные оппозиции "наследственно" детерминированы. Из них можно складывать произвольные мозаики, смеси и композиции, синтезировать всякие оттенки «белого – черного». Бинарный принцип позволяет легко выстраивать доступные пониманию ментальные структуры любой сложности в виде двоичного дерева парных взаимодействий.

Более того, двоичность можно дополнительно "ужать" и перевести в разряд дробных иррациональностей $1<R<2$, наилучшей из которых в этом интервале считается золотое сечение (ЗС) $\Phi \approx 1.618$, экономно и гармонично объединяющее два взаимодействия или две противоположности, кому как нравится. – По принципу поиска экстремума действительной функции одной переменной на заданном отрезке методом золотого сечения (Д.Кифер, 1953).

К слову, процесс нахождения компромисса в политике аналогичен, когда достигнутый плюс становится обновленной точкой отсчета для последующего шага-этапа переговоров (диалогов). Было бы желание-стремление, вместо привнесения завуалированной лжи.

Уравновесить два отношения, два бинара – это и есть основное предназначение золотой пропорции. Внимательно всмотритесь в корзинку зрелого подсолнечника, и многое поймете.

Подобно геометрическому треугольнику, троичная техника – жестко-связная "замороженная" структура, потому косная, нежизненная и онтологически малоперспективная.

Следующим уровнем диалектического познания природным образом становится дважды бинарная или квадратичная (тетрадная) структура: $2 + 2 = 2 \times 2 = 2^2$.

В геометрическом плане-аспекте она соответствует более мягкой и податливо-эластичной фигуре квадрата, способного превращаться в ромб с равными сторонами или прямоугольник с равными прямыми углами.

Четыре измерения человеческого бытия: физическое и биологическое, психологическое и духовное. В теологии – собственное имя Бога тетраграмматон и крест. В математике – кватернионы, теорема о четырех цветах, теорема Лагранжа о четырех квадратах, в квантовой физике – мнимые числа $\pm 1 \pm i$. Четвертая степень – наивысшая для алгебраических уравнений общего вида, разрешимых в радикалах. И так далее.

В рамках золотой пропорции наряду с двумя внутренними симметричными золотыми сечениями отрезка (целого) добавляются ещё два равнозначных деления внешним образом.

В теории логарифмов подобное расширение адекватно переходу от обычного логарифма к его аналитическому расширению-продолжению – би- или дилогарифму.

Итак, двигаясь по диалектической спирали развития, снова вернулись к логарифмированию. *Step by step...*

Ода логарифму

В отличие от бинара, на который любят нападать хейтеры, добраться им до логарифма, степенно уходящего в бесконечность, – руки коротки. Ему можно посвящать оды и стихи.

Борис Слуцкий, чья жизнь во многом была связана с Харьковом, в своем известном стихотворении «Физики и лирики», ставшем крылатым выражением в значении «люди науки и люди искусства», писал (1959): Потому-то, словно пена, Опадают наши рифмы. И величие степенно Отступает в логарифмы. – «Не то, что нынешнее племя» малограмотных и косноязычных невежд, которые под копирку воровского арго вкладывают в слово "ботаник" нарицательный смысл, не подозревая, что таковыми является большинство великих людей всех времен и народов: Сократ, Христос, Ньютон, Ландау и др.

Изобретение логарифмов началось с астрономии, навигации и стало выдающимся событием в развитии научно-практических знаний человечества.

Да, логарифмическая линейка выполнила свою миссию и канула в века. Но только как инструмент, на смену которого (с помощью расчетов по линейке!) пришел компьютер.

Сам логарифм бессмертен. В силу своих уникальных свойств. Например, он позволяет заменить умножение или деление многозначных чисел более простыми операциями сложения и вычитания, извлечение корня – делением на показатель степени и др.

Логарифмическая функция стала незаменимой при решении многих дифференциальных уравнений, которые описывают практически все законы природы.

Воистину безграничны приложения логарифмической функций в самых разных областях науки и техники. Математика, физика, химия, биология сегодня просто не мыслятся без логарифмов, безусловным торжеством которых стал натуральный логарифм.

Логарифмы появляются там, где проявляется самоподобие: рекурсивные алгоритмы, фрактальные размерности, спиралеобразные формы.

Логарифмическая спираль является математическим символом соотношения форм роста, а выдающийся немецкий поэт Гёте считал её символом жизни и духовного развития.

По логарифмическим спиралям закручены многие галактики, включая Млечный путь.

Зрительные, слуховые и температурные рецепторы передают информацию в мозг в виде дискретных импульсов, частота которых – логарифмическая функция от мощности принимаемого сигнала. По логарифмической шкале оценивается громкость шума и яркость звезд. Величина ощущения пропорциональна логарифму величины раздражения.

Человек каждодневно буквально "впитывает" логарифмы через музыку в виде рационального приближения $\log_2(3/2)$. – Разложение этого числа в непрерывную (цепную) дробь дает наиболее подходящее (оптимальное) отношение 7/12, лежащее в основе современного деления на 12 полутонов базисного музыкального интервала октавы, в котором соотношение частот между звуками составляет 1:2.

Натуральные логарифмы с константой золотого сечения.

Логарифмическая функция раскладывается в степенной ряд Маклорена (n = 1, 2, 3, ...):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_n (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1;1].$$

Положим $x = \phi = \Phi^{-1}$. С учетом равенств $\Phi = 1+\phi$ и $\phi = 1-\phi^2$ находим [7]:

$$\ln(1+\phi) = \ln\Phi = \phi - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^3}{3} - \frac{\phi^4}{4} + \ldots = \sum_n \frac{\phi^n}{n}(-1)^{n+1}; \tag{1}$$

$$-\ln(1-\phi) = 2\ln\Phi = \phi + \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^3}{3} + \frac{\phi^4}{4} + \ldots = \sum_n \frac{\phi^n}{n}; \tag{2}$$

(1) + (2) $\rightarrow$
$$3\ln\Phi = 2\left(\phi + \frac{\phi^3}{3} + \frac{\phi^5}{5} + \ldots\right) = 2\sum_n \frac{\phi^{2n-1}}{2n-1} = 2\cdot\operatorname{arth}\phi; \tag{3}$$

(2) – (1) $\rightarrow$
$$\ln\Phi = \phi^2 + \frac{\phi^4}{2} + \frac{\phi^6}{3} + \ldots = \sum_n \frac{\phi^{2n}}{n}. \tag{4}$$

Для константы ЗС, чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n справедливы равенства [8] $\sqrt{5}\,F_n = \Phi^n - (-\phi)^n$, $L_n = \Phi^n + (-\phi)^n$, $\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$, которые подставляем в (1)–(2):

$$\ln\Phi = \sum_n \frac{\sqrt{5}\,F_n - L_n}{2n} = \sum_n \frac{\Phi^n - L_n}{n} = \sum_n \frac{F_n\Phi - F_{n+1}}{n}.$$

Из соотношения (3) и тождеств [8, с. 124] следуют связи между логарифмом $\ln\Phi$ и гиперболическими (h) функциями:

$$\sinh\left(\frac{3}{2}\ln\Phi\right) = \sqrt{\phi},\ \cosh\left(\frac{3}{2}\ln\Phi\right) = \sqrt{\Phi},\ \tanh\left(\frac{3}{2}\ln\Phi\right) = \phi,\ \cosh(\ln\Phi) = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \sinh(\ln\Phi) = \frac{1}{2}.$$

Сама константа ЗС выражается суммой бесконечной геометрической прогрессии:

$$\Phi = \phi + \phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \ldots = \sum_{n\ge1}\phi^n = \frac{\phi}{1-\phi} = \frac{\phi}{\phi^2}.$$

Общие сведения о дилогарифме

Дилогарифм (дилогарифм Эйлера, функция Спенса) – специальная математическая функция $\mathrm{Li}_2(z)$, которая является частным случаем полилогарифма $\mathrm{Li}_s(z)$ при $s=2$ и определяется бесконечным степенным рядом [9] для комплексных значений переменной z

$$\mathrm{Li}_s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s},\quad |z|<1$$

а также его аналитическим продолжением [10, с. 652]

$$\mathrm{Li}_2(z)=-\int_0^z\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\int_0^1\frac{\ln t}{t-z^{-1}}dt=2\sqrt{z}\int_0^1\frac{\ln\left[1+\sqrt{z}(1-t)\right]}{1-t\sqrt{z}}dt,\qquad \arg(1-z)<\pi.$$

В случае действительного $z\geq 1$ первый интеграл можно записать как

$$\mathrm{Li}_2(z)=\frac{\pi^2}{6}-\int_1^z\frac{\ln(1-t)}{t}dt-i\pi\ln z\,,$$

откуда, разложив логарифм в ряд и почленно интегрируя, получаем:

$$\mathrm{Li}_2(z)=\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\ln^2 z-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2 z^k}-i\pi\ln z\,.$$

Название функции связано с тем, что её можно определить как повторяющийся интеграл от самой себя: $\mathrm{Li}_{s+1}(z)=-\int_0^z\frac{\mathrm{Li}_s(t)}{t}dt$. То есть дилогарифм является интегралом функции, включающей обычный логарифм, и так далее:

$$\mathrm{Li}_{-1}(z)=\frac{z}{(1-z)^2},\qquad \mathrm{Li}_0(z)=\frac{z}{1-z},\qquad \mathrm{Li}_1(z)=-\ln(1-x),\qquad \mathrm{Li}_2(z),\ \ldots$$

Например, сравнение по разложению в ряд обычного логарифма и дилогарифма:

$$-\ln(z)=\int_0^z\frac{dt}{1-t}=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots;\qquad \mathrm{Li}_2(z)=-\int_0^z\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\ldots$$

Существует ряд полезных функциональных соотношений для дилогарифмов:

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2(-z)=\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(z^2\right),\qquad \mathrm{Li}_2(1-z)+\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{2}\ln^2 z\,;$$

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2(1-z)=\frac{\pi^2}{6}-\ln z\ln(1-z),\qquad |\arg(z)|,\ |\arg(1-z)|<\pi;$$

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\ln^2 z+\pi\, i\ln z,\qquad |\arg(-z)|<\pi;$$

$$\mathrm{Li}_2(-z)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right)=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\ln^2 z,\ (\#)\qquad \mathrm{Li}_2(-z)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right)=-\frac{1}{2}\ln^2(1+z);$$

$$\mathrm{Li}_2(z)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{1-z}\right)=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\ln^2(1-z)-\ln(-z)\ln(1-z), \qquad |\arg(-z)|<\pi;$$

$$\mathrm{Li}_2(-z)-\mathrm{Li}_2(1-z)+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(1-z^2\right)=-\frac{\pi^2}{12}-\ln(z)\ln(1+z).$$

Доказательство формул сравнительно несложное.

Например, в одном из них (#) сначала находится производная, которая затем интегрируется:

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right)=\frac{d}{dz}\left(-\int_0^{-1/z}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\right)=\frac{d}{dz}\left(-\int_0^{z}\frac{\ln(1-t)}{t}t^2dt\right)=\frac{\ln(1+1/z)}{z}=\frac{\ln(1+z)-\ln(z)}{z};$$

$$\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right)=\int_0^z\frac{\ln(1+z)-\ln z}{z}dz=\mathrm{Li}_2(-z)-\int_0^z\frac{\ln z}{z}dt=-\mathrm{Li}_2(-z)-\frac{1}{2}\ln^2 z+C;$$

$$z=1 \quad\Rightarrow\quad C=2\mathrm{Li}_2(-1)=-\pi^2/6;$$

$$\underline{\mathrm{Li}_2(-z)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right)=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\ln^2 z;}$$

$$z=-1=e^{i\pi} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Li}_2(1)-\mathrm{Li}_2(-1)=\frac{\pi^2}{4}.$$

Как и большинство специальных функций, дилогарифм в общем случае не имеет точно вычисляемых значений, за исключением нескольких особых случаев.

Среди них шесть обусловлены золотым сечением (ЗС), включая две пары действительных значения для аргументов: $z=\{-\Phi \quad -\phi \quad \phi^2 \quad \phi\}$ (табл. 1).

Таблица 1

Особые значения дилогарифма, в том числе для степеней константы золотого сечения

z	Дилогарифмы $\mathrm{Li}_2(z)$		z	Золотые дилогарифмы $\mathrm{Li}_2(z)$	
–1	$-\frac{1}{12}\pi^2$	– 0,8225	$-\Phi$	$-\frac{1}{10}\pi^2-\ln^2\Phi$	–1,2185
0	0	0	$-\phi$	$-\frac{1}{15}\pi^2+\frac{1}{2}\ln^2\Phi$	–0,5422
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{2}\ln^2 2$	0,5822	ϕ^2	$\frac{1}{15}\pi^2-\ln^2\Phi$	0,4264
1	$\frac{1}{6}\pi^2$	1,6450	ϕ	$\frac{1}{10}\pi^2-\ln^2\Phi$	0,7554
2	$\frac{1}{4}\pi^2-i\pi\ln 2$	2,4674 – 2,1776 i	Φ	$\frac{11}{15}\pi^2+\frac{1}{2}\ln^2(-\phi)$	2,4187 – 1,5118 i
± i	$-\frac{1}{48}\pi^2\pm i\,\mathbf{G}$	0,2056 ± 0,9160 i	Φ^2	$-\frac{11}{15}\pi^2-\ln^2(-\Phi)$	2,4003 – 3,0235 i

$$\mathbf{G}=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\approx 0{,}91596559\ldots$$ – постоянная Каталана.

Как не вспомнить «крылатую латынь»: *Doctrina multiplex, veritas una*. – Учений много, истина одна. Она как божья искра одарила константу ЗС уникальной особенностью, присущей идеальным системам: появляться в нужный момент в необходимом месте.

Отметим полезное свойство "золотого" логарифма и отношений на его основе:

$\ln\Phi = \operatorname{arcsch} 2$, где $\operatorname{arcsch} z = \ln\left(z^{-1} + \sqrt{z^{-2}+1}\right)$ – обратный гиперболический косеканс;

$$\frac{\mathrm{Li}_2(-\phi)+\mathrm{Li}_2(\phi^2)}{\mathrm{Li}_2(-\Phi)+\mathrm{Li}_2(\phi)} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{|\,\mathrm{Li}_2(-\phi)\,|+\mathrm{Li}_2(\phi^2)}{|\,\mathrm{Li}_2(-\Phi)\,|+\mathrm{Li}_2(\phi)} = \frac{2}{3} - \frac{15}{2}\left(\frac{\ln\Phi}{\pi}\right)^2 \approx 0{,}4907\,.$$

Изменение специальной функции дилогарифма $\mathrm{Li}_2(x)$ демонстрирует рисунок 1.

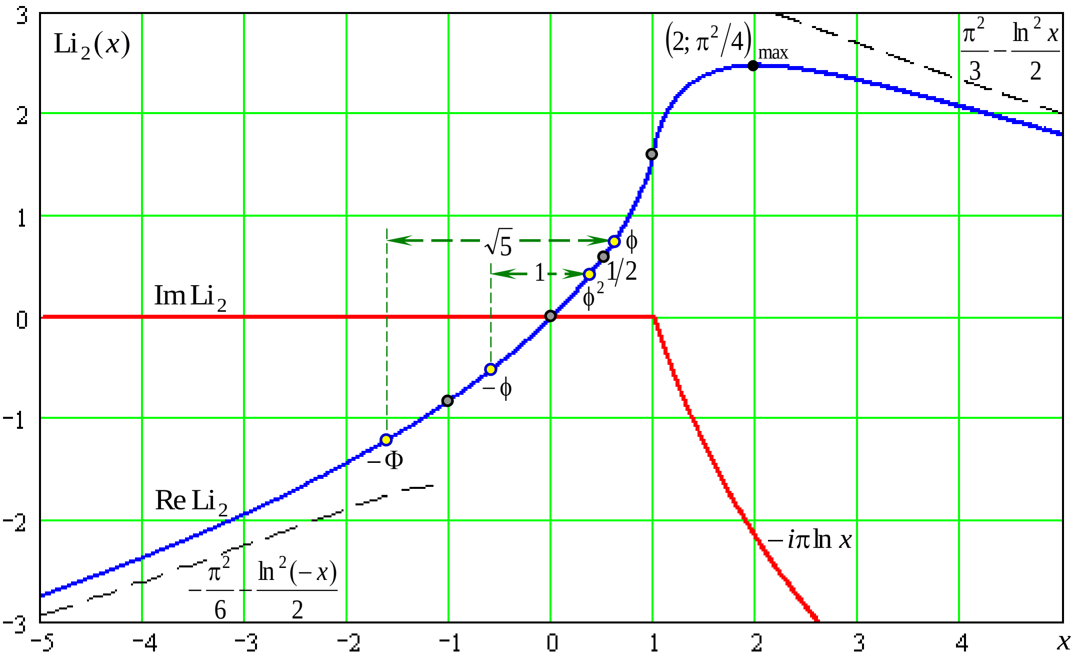


Рис.1. Дилогарифм действительной переменной x:
° – восемь особых точек с действительными значениями $\mathrm{Li}_2(x)$;
– – – – асимптоты для больших величин x

Дилогарифмы на бесконечном интервале

Полилогарифмы $\mathrm{Li}_s(z)$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ также выражаются в виде интегралов от двух распределений, используемых в квантовой статистике [12]:

<u>Бозе-Эйнштейна, $z < 1$</u> | <u>Ферми-Дирака, $z > -1$</u>

$$\mathrm{Li}_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t/z - 1}\,; \qquad -\mathrm{Li}_s(-z) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t/z + 1}\,.$$

Эти представления легко проверяются разложением Тейлора подынтегральной функции по z с последующим почленным интегрированием.

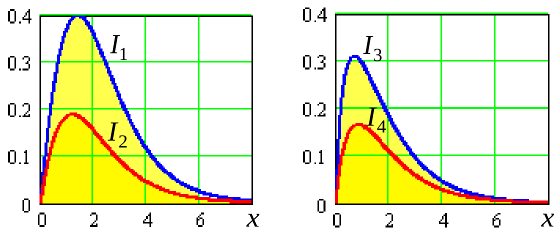
Для дилогарифмов (s = 2) неопределенные интегралы с константами ЗС равны (аддитивные константы опущены):

$$\int \frac{x}{e^x\Phi-1}=x\ln\left(1-\phi e^{-x}\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\phi e^{-x}\right);\qquad \int \frac{x}{e^x\Phi+1}=-x\ln\left(1+\phi e^{-x}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\phi e^{-x}\right);$$

$$\int \frac{x}{e^x\phi-1}=x\ln\left(1-\Phi e^{-x}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\Phi e^{-x}\right);\qquad \int \frac{x}{e^x\phi+1}=-x\ln\left(1+\Phi e^{-x}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\Phi e^{-x}\right).$$

Например, находим особые (точные аналитические) значения интегралов (см. табл. 1):

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x/a-1}=\mathrm{Li}_2(a),\qquad \int_0^\infty \frac{x}{e^x/a+1}=-\mathrm{Li}_2(-a);$$



$$I_1=\int_0^\infty \frac{x}{e^x\phi+1}=-\mathrm{Li}_2(-\Phi)\approx 1{,}2185$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{x}{e^x\Phi+1}=-\,\mathrm{Li}_2(-\phi)\approx 0{,}5422$$

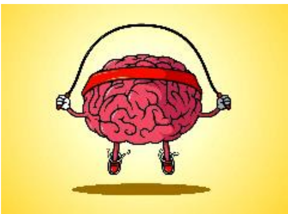
$$I_3=\int_0^\infty \frac{x}{e^x\Phi-1}=\ \mathrm{Li}_2(\phi)\approx 0{,}7554$$

$$I_4=\int_0^\infty \frac{x}{e^x\Phi^2-1}=\mathrm{Li}_2\left(\phi^2\right)\approx 0{,}4264$$

Заметим, что кроме дилогарифма, существует другая специальная функция – интегральный логарифм Эйлера $\mathrm{li}\,(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$, где подынтегральная функция равна обратному логарифму. Несмотря на внешнюю простоту, интегральный логарифм нельзя выразить в конечной форме через элементарные функции. Характерные примеры интегралов с интегральным логарифмом приведены в приложении 1.

Далее перейдем к более детальному исследованию "золотых" дилогарифмов. Но сначала небольшая разминка...

Интегральный променад



В начале нового года познакомился с решением «неприятно выглядящего» интеграла [13] с использованием техники Фейнмана или правила Лейбница для дифференцирования под знаком интеграла.

Предложенный подход несколько разочаровал. Прежде всего, сложностью преобразований с пятиразовой (!) заменой переменных.

Кроме того, в основу положен ранее полученный результат, который нужно было предварительно получить. Вдобавок, решение ограничено частным случаем, в то время как техника Фейнмана позволяет не только вычислить интеграл, но и дополнительно выполнить некоторое обобщение.

Найдем интеграл с «чистого листа». Движительным моментом стал один "подсмотренный" несобственный интеграл с комплексной переменной $i^2=-1$, содержащий дилогарифм

$$\int \frac{\log\left(t^2+x^2\right)}{t^2+x^2}\,dx=\frac{i\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{it+x}{x-it}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)\left(\log\left(t^2+x^2\right)+2\log\left(\frac{2t}{t+ix}\right)+i\tan^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)\right)}{t}$$

Предлагается такой алгоритм (всё на виду, особые комментарии излишни):

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}dx=\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}dx-\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2}dx=I_1-I_2\,;$$

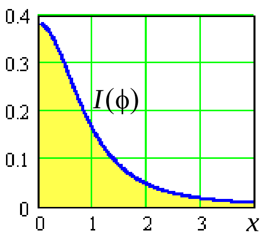
$$I_1=\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln(1+ax^2) & dv=\dfrac{dx}{x^2} \\ du=\dfrac{2ax\,dx}{1+ax^2} & v=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right|=\underset{\to 0}{\left.\frac{-\ln(1+ax^2)}{x}\right|_{+0}^{\infty}}+\int_0^\infty \frac{2a\,dx}{1+ax^2}=2a\left.\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{a}x}{\sqrt{a}}\right|_0^\infty=\underline{\sqrt{a}\pi}\,;$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax^2)}{1+x^2}dx,\qquad \frac{\partial I_2}{\partial a}=\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)(1+ax^2)}dx=\frac{1}{a-1}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+ax^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{a-1}\left.\left(\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{a}x\right)\right|_0^\infty=\frac{1}{a-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\,\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a+\sqrt{a}}\,;$$

$$I_2=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{a+\sqrt{a}}=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{a} \\ du=\dfrac{da}{2\sqrt{a}}\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}\int\frac{2u\,du}{u^2+u}=\underline{\pi\ln(1+\sqrt{a})}+C,\qquad I_2(0)=0\ \to\ C=0.$$

$$a=c^2\ \to\ I(c)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+c^2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx=c\pi-\pi\ln(1+c);\qquad I(1)=\pi\ln\frac{e}{2}\approx 0{,}9640\,.$$



$$\boxed{I(\phi)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+\phi^2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx=\pi(\phi-\ln\Phi)\approx 0{,}4298}$$

Дилогарифм не понадобился. Функция обычного логарифма трансформировалась в логарифмы конкретных констант, включая золотые. Ничего, зато размялись...

Пи-квадрат

Характерная черта особых значений дилогарифма (табл. 1) – наличие числа π^2.

Всё началось с Леонарда Эйлера, который вычислил, а по сути, открыл (1736) предел суммы бесконечного ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n\ge 1}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, проделав изобретательную математическую работу с использованием тригонометрических функций.

Это равенство демонстрирует одну из самых поразительных особенностей математики – взаимосвязанность, казалось бы, несвязанных между собой идей, – в данном случае целых чисел с трансцендентным числом.

Величина $\pi^2/6$ также совпадает со значением дзета-функции Римана $\zeta(2)$ (гипотеза Римана о нулях дзета-функции $\zeta(s)$ входит в число нерешенных шести задач тысячелетия), а через дилогарифмы – с золотым сечением:

$$\frac{\pi^2}{6}=\zeta(2)=\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(y)+\ln x\ln y,\qquad x=\frac{\phi}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{\Phi}{\sqrt{5}}.$$

В геометрии значение $\pi^2/6$ численно определяет следующие параметры:

- длина окружности, диаметр которой равен отношению объема эллипсоида к описанному кубоиду;
- длина окружности, диаметр которой равен отношению площади поверхности сферы к описанному кубу;
- объем шара, вписанного в правильный куб объемом π;
- площадь поверхности сферы, вписанной в куб с площадью поверхности π.

В целом можно сказать, что "пи-квадрат" сопровождает дилогарифмы и не только, о чём свидетельствую выборочные примеры определенных интегралов;

➢ $$\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x^p}{1-x^p}\right)dx=-\frac{1}{p}\left[\mathrm{Li}\left(-x^p\right)+\mathrm{Li}\left(1-x^p\right)+\ln\left(x^p\right)\left(\ln\left(1+x^p\right)-\ln\frac{1+x^p}{1-x^p}\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{-\mathrm{Li}(-1)+\mathrm{Li}(1)}{p}=\frac{1}{p}\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^2}{6}\right)=\underline{\frac{\pi^2}{4p}};\qquad (p\ge 1)$$

➢ $$\int_1^\infty\frac{\ln\left(1+x^{-n}\right)}{x}dx=\left.\frac{\mathrm{Li}\left(-x^{-n}\right)}{n}\right|_1^\infty=\frac{-\mathrm{Li}(-1)}{n}=\underline{\frac{\pi^2}{12n}};$$

➢ $$\int_0^1\frac{\ln\left(1+x+\ldots+x^n\right)}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)dx=\int_0^1\frac{\ln\left(1-x^{n+1}\right)}{x}dx-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx=$$

$$=\left[-\frac{\mathrm{Li}_2\left(x^{n+1}\right)}{n+1}+\mathrm{Li}_2(x)\right]_0^1=\mathrm{Li}_2(1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\underline{\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{n}{n+1}};$$

➢ $$\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^p+1}dx=\left\|\int_0^\infty\frac{x^{m-1}}{x^p+1}dx=\frac{1}{p}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi m/p)}\right\|=\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{u\to 0}\int_0^\infty\frac{x^u}{x^p+1}dx=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{u\to 0}\frac{1}{p}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi(u+1)/p)}=\frac{\pi}{p}\left(-\frac{\pi}{p}\frac{\cos(\pi/p)}{\sin^2(\pi/p)}\right)=-\frac{\pi^2}{p^2}\cdot\frac{\cos(\pi/p)}{\sin^2(\pi/p)};$$

частные случаи (5-й порядок): $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^5+1}dx=\frac{\pi^2}{25}\frac{2\Phi}{2-\phi}$, $\quad\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^{10}+1}dx=\frac{\pi^2}{50}\Phi^3\sqrt{2-\phi}$;

➢ $$\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^p-1}dx=\frac{\pi^2}{p^2}\csc^2\frac{\pi}{p}\quad(p>1),\qquad\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^5-1}dx=\frac{\pi^2}{25}\frac{4}{2-\phi},\qquad\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^{10}-1}dx=\frac{\pi^2}{25}\Phi^2.$$

Некоторые "π^2-интегралы" [14]:

$$\frac{\pi^2}{2} = \int_0^\infty \frac{x^2 \cosh x}{\sinh^2 x} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sinh x} dx$$ – объем 4-мерной единичной сферы;

$$\frac{\pi^2}{3} = \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{(x-1)^2} dx = \int_0^\infty \frac{\ln^2(x+1)}{x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{\sinh^2 x} dx\,;$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^1 \ln\left(\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right) \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^\infty \frac{x}{\sinh x} dx = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} dx\,;$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) dx = \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\sqrt{x}}+1} dx\,;$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx\,; \qquad \frac{\pi^2}{12} = \int_0^1 \frac{-\ln x}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_0^\infty \frac{x}{e^x+1} dx\,;$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \int_{+0}^1 \frac{x^2 \ln x}{(x+1)^2 (x^2+1)} dx\,; \qquad \frac{\pi^2}{20} = \int_0^{\ln\Phi} x \coth x \, dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x} dx\,;$$

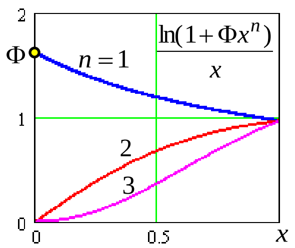
$$\frac{\pi^2}{24} = -\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \ln(\sin x) dx\,; \qquad \frac{\pi^2}{32} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx\,.$$

В приложении 2 рассмотрен интеграл, который содержит слагаемые с числами π и π^2.

Далее перейдем к конкретным примерам с "золотыми" дилогарифмами, в которые встроена константа золотого сечения $\Phi = \phi^{-1}$.

1) В справочнике [11, с. 250, п. 1.6.10.10] приведен простой интеграл с дилогарифмом в правой части $\int_0^x \frac{\ln(1+ax^n)}{x} dx = -\frac{1}{n} \mathrm{Li}_2\left(-ax^n\right)$.

Ограничившись единичным интервалом, получаем $\int_0^1 \frac{\ln(1+ax^n)}{x} dx = -\frac{1}{n} \mathrm{Li}_2(-a)$ и в частности, золотые дилогарифмические интегралы:



$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+\Phi x^n)}{x} dx = -\frac{\mathrm{Li}_2(-\Phi)}{n} = \frac{\pi^2/10 + \ln^2\Phi}{n}}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+\phi x^n)}{x} dx = -\frac{\mathrm{Li}_2(-\phi)}{n} = \frac{\pi^2/15 - 0{,}5\ln^2\Phi}{n}}$$

2) Точные значения дилогарифма для степеней константы золотого сечения (табл. 1) позволяют определять золотые интегралы с дилогарифмами.

Например, такой непростой интеграл [15]:

$$I(a)=\int_0^1 \frac{\ln\left(1+ax^2\right)}{1+x}dx=\left|\begin{array}{c} x^2=t \\ 2xdx=dt \end{array}\right|=\int_0^1 \frac{\ln(1+at)}{2\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)}dt\,.$$

Найдем производную по a и затем воспользуемся математическими сервисами [16, 17] для вычисления неопределенного интеграла

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x}}{2\,(1+a\,x)\,(1+\sqrt{x})}\,dx = \frac{2\,a\log(\sqrt{x}+1)+\log(a\,x+1)-2\sqrt{a}\,\tan^{-1}(\sqrt{a}\,\sqrt{x})}{2\,(a^2+a)} + \text{constant}}$$

$$I'(a)=\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{2(1+at)\left(1+\sqrt{t}\right)}dt=\left[\frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{1+a}+\frac{\ln(1+at)}{2a(1+a)}-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{at}}{\sqrt{a}(1+a)}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\ln 2}{1+a}+\frac{\ln(1+a)}{2a(1+a)}-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{a}}{\sqrt{a}(1+a)}=\frac{\ln(1+a)}{2a}+\frac{d}{da}\left(\ln 2\cdot\ln(1+a)-\frac{\ln^2(1+a)}{4}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{a}\right).$$

$$I(a)=\int_0^a I'(a)da=\left[\ln 2\cdot\ln(1+a)-\frac{\ln^2(1+a)}{4}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{a}\right]_0^a+\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\ln(1+a)}{a}da\,;$$

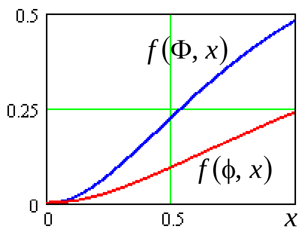
$$I(a)=\int_0^1 \frac{\ln\left(1+ax^2\right)}{1+x}dx=\ln 2\cdot\ln\,(1+a)-\frac{\ln^2(1+a)}{4}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-a).$$

Подставляя табличные значения дилогарифма $\mathrm{Li}_2(\cdot)$, получаем:

$$I(\Phi)=\frac{\pi^2}{20}-\frac{\ln^2\Phi}{2}+\ln 4\cdot\ln\Phi-\operatorname{arctg}^2\sqrt{\Phi}\approx 0{,}22658\,;$$

$$I(\phi)\;=\frac{\pi^2}{30}-\frac{\ln^2\Phi}{2}+\ln 2\cdot\ln\Phi-\operatorname{arctg}^2\sqrt{\phi}\;\approx 0{,}10288\,;$$

$$I(-\phi)\;=-\frac{\pi^2}{20}-\frac{\ln^2\Phi}{2}+\ln 4\cdot\ln\phi-\operatorname{arctg}^2\left(i\sqrt{\phi}\right)\approx -0{,}15006\,.$$



$$f(a,\,x)=\frac{\ln\left(1+ax^2\right)}{1+x}$$

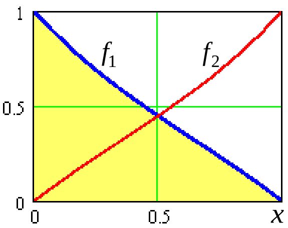
3) Следующий золотой интеграл также не содержит дилогарифмы в явном виде, но они встроены в вычисления с использованием интеграла из справочника [11, с. 250, п. 1.6.3.8]

$$\int \frac{\ln u\, du}{u-a} = \ln u \ln \frac{a-u}{a} + \mathrm{Li}_2\left(\frac{u}{a}\right)$$

с соответствующей заменой переменных при необходимости, например,

$$\int \frac{\ln(a-x)\, dx}{x} = \left| \begin{matrix} a-x=u \\ dx=-du \end{matrix} \right| = \int \frac{\ln u\, du}{u-a} = \ln(a-x)\ln\frac{x}{a} + \mathrm{Li}_2\left(\frac{a-x}{a}\right).$$

$$f_1 = \frac{L}{x} \qquad f_2 = \frac{L}{1-x}$$
$$L = \ln\left(1+x-x^2\right)$$



$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x-x^2\right)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x-x^2\right)}{1-x}dx = \\ &= 2\ln^2\Phi = \frac{1}{2}\ln^2\Phi^2 = \frac{1}{2}\mathrm{arch}^2\frac{3}{2} \approx 0{,}4631 \end{aligned}}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1+x-x^2\right)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln(\Phi-x)}{x}dx + \int_0^1 \frac{\ln(\phi+x)}{x}dx =$$

$$= [\mathrm{Li}_2(1-x\phi) + \ln(\Phi-x)\cdot\ln(x\phi)]_0^1 + [\mathrm{Li}_2(1+x\Phi) + \ln(-x\Phi)\cdot\ln(\phi+x)]_0^1 =$$

$$= \mathrm{Li}_2\left(\phi^2\right) + \ln^2\phi - \mathrm{Li}_2(1) - \ln(\Phi)\cdot\ln\underset{x\to 0}{(x\phi)} + \mathrm{Li}_2\left(\Phi^2\right) + \ln(-\Phi)\cdot\ln(\Phi) - \mathrm{Li}_2(1) - \ln\underset{x\to 0}{(-x\Phi)}\cdot\ln\Phi =$$

$$= \left| \begin{matrix} \ln(-\Phi) = \ln(\Phi) + i\pi \\ \mathrm{Li}_2\left(\phi^2\right) + \mathrm{Li}_2\left(\Phi^2\right) - 2\mathrm{Li}_2(1) = -2\ln^2\Phi - i\cdot 2\pi\ln\Phi \\ -\ln(\Phi)\cdot\ln\underset{x\to 0}{(x\phi)} - \ln\underset{x\to 0}{(-x\Phi)}\cdot\ln\Phi = 2\ln^2\Phi + i\cdot\pi\ln\Phi \\ \ln^2\phi + \ln(-\Phi)\cdot\ln(\Phi) = 2\ln^2\Phi + i\cdot\pi\ln\Phi \end{matrix} \right| = 2\ln^2\Phi\,.$$

4) Вычисляя интеграл $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}$, один из авторов задает риторический вопрос [18] «Почему в нем возникает число π». Правильнее было бы спросить, как появляется π^2.

То есть не просто π, а его квадрат. – Это важное уточнение.

И связано оно с суммированием числового ряда обратных квадратов:

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(формула Эйлера, 1735).}$$

Почему так происходит, показано в приложении 3 для двух интегралов $\int_0^\infty \frac{x}{e^x \pm 1}$.

Для нас более важной является общая форма определенного интеграла:

$$\boxed{I_L(a) = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - a} = \frac{1}{a}\mathrm{Li}_2(a)}\,.$$

Параметр a изменяется в интервале $0 < |a| \le 1$. Если $|a| > 1$, то интеграл расходится.

$$I_L(a)=\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-a}=\int_0^\infty xe^{-x}\left(\frac{1}{1-ae^{-x}}\right)dx=\int_0^\infty xe^{-x}\left(\sum_{n\ge 0}a^n e^{-nx}\right)dx=\sum_{n\ge 0}a^n\int_0^\infty xe^{-(n+1)x}dx=$$

$$=\sum_{n\ge 0}\frac{a^n}{(n+1)^2}=\frac{1}{a}\sum_{n\ge 1}\frac{a^n}{n^2}=\frac{1}{a}\mathrm{Li}_2(a).$$

Здесь используется сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$1+u+u^2+\ldots=\frac{1}{1-u},\quad |u|<1\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1-ae^{-x}}=\sum_{n\ge 0}\left(ae^{-x}\right)^n,$$

а также интегрирование по частям согласно компактной английской DI-схеме:

	D	**I**
+	x	e^{-cx}
–	1	$-e^{-cx}/c$
+	0	e^{-cx}/c^2

$$\Rightarrow\quad \int_0^\infty xe^{-cx}dx=-\frac{x}{c}e^{-cx}-\frac{1}{c^2}e^{-cx}\Big|_0^\infty=\frac{1}{c^2}.$$

Неопределенный интеграл соответственно равен $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{e^x-a}=\frac{x\ln\left(1-ae^{-x}\right)-\mathrm{Li}_2\left(ae^{-x}\right)}{a}+C$.

Таблица 2

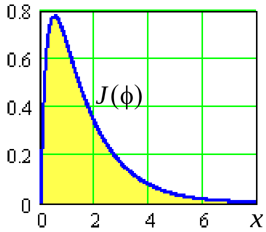
Интеграл $I_L(a)$: полный набор значений в аналитическом виде

a	-1	$-\phi$	$-1/2$	0	ϕ^2	ϕ	1
$I(a)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\Phi\left(\frac{\pi^2}{15}-\frac{1}{2}\ln^2\Phi\right)$	$\frac{\pi^2}{6}-\ln^2 2$	1	$\Phi^2\left(\frac{\pi^2}{15}-\ln^2\Phi\right)$	$\Phi\left(\frac{\pi^2}{10}-\ln^2\Phi\right)$	$\frac{\pi^2}{12}$
~	1,6449	1,2223	1,1645		1,1164	0,8773	0,8225

Напоминает логарифмическое зеркало золотого сечения. Далее получаем:

$$\int_0^\infty x\frac{e^{-x}+1}{e^x-1}dx=\int_0^\infty\left(\frac{2x}{e^x-1}-xe^{-x}\right)dx=2\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx-\int_0^\infty xe^{-x}dx=2\mathrm{Li}_2(1)-1=\frac{\pi^2}{3}-1;$$

$$J(a)=\int_0^\infty\frac{x\left(e^{-x}+1\right)}{e^x-a}dx=\int_0^\infty\left(\frac{x(1+1/a)}{e^x-a}-1/a\cdot xe^{-x}\right)dx=\frac{a+1}{a}\int_0^\infty\frac{x}{e^x-a}dx-\frac{1}{a}\int_0^\infty xe^{-x}dx=\frac{a+1}{a^2}\mathrm{Li}_2(a)-\frac{1}{a};$$



$$J(\phi)=\int_0^\infty\frac{x\left(e^{-x}+1\right)}{e^x-a}dx=\frac{\Phi}{\phi^2}\mathrm{Li}_2(\phi)-\frac{1}{\phi}=$$

$$=\Phi^3\left(\frac{\pi^2}{10}-\ln^2\Phi\right)-\Phi\approx 1{,}5819$$

5) В работе [19] вычислен определенный интеграл с дилогарифмом (в левой части) на интервале единичной длины от $-\phi$ до $-\Phi$.

В области отрицательных значений выполняется неравенство $-\Phi < -\phi$.

Поменяв пределы интегрирования, выполним преобразования:

$$I = \int_{-\Phi}^{-\phi} \frac{\mathrm{Li}_2(x)}{x} dx = \int_{-\Phi}^{-\phi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-\Phi}^{-\phi} x^{k-1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} x^k \Big|_{-\Phi}^{-\phi} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\phi)^k}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\Phi)^k}{k^3} - = \mathrm{Li}_3(-1/\Phi) - \mathrm{Li}_3(-\Phi) = \frac{1}{6}\left(\ln^3 \Phi + \pi^2 \ln \Phi\right) \approx 0{,}8101.$$

$$\boxed{\int_{-\Phi}^{-\phi} \frac{\mathrm{Li}_2(x)}{x} dx = \frac{1}{6}\left(\ln^3 \Phi + \pi^2 \ln \Phi\right) \approx 0{,}8101}.$$

Можно также представить аналитическое описание определенных интегралов непосредственно от дилогарифма, хотя формулы маловыразительны, например:

$$\int_0^{\phi} \mathrm{Li}_2(x) dx = \phi\left(\frac{\pi^2}{10} - 1 - 2\phi \ln \phi - \ln^2 \phi\right) \approx 0{,}2164;$$

$$\int_{-\phi}^{0} \mathrm{Li}_2(x) dx = -\phi\left(\frac{\pi^2}{15} + 1 + \frac{1}{\phi^2} \ln \phi - \frac{1}{2} \ln^2 \phi\right) \approx -0{,}1745.$$

6) Найдем интеграл с дилогарифмом и иррациональной степенью [20], применив интегральную форму дилогарифма

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt, \qquad \mathrm{Li}_2(-x) = |\, t = -y \,| = \int_0^x \frac{-\ln(1+y)}{y} dy,$$

а также "трюк" с двойным интегралом, дополненный интегрированием по частям ($0 < a < 1$):

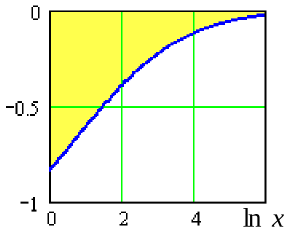
$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{x^{a+1}} dx = \int_0^{\infty} dx \int_0^{x} \frac{-\ln(1+y)}{y} \frac{1}{x^{a+1}} dy = \int_0^{\infty} dy \int_y^{x} \frac{-\ln(1+y)}{y} \frac{1}{x^{a+1}} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{-\ln(1+y)}{y} \cdot \frac{-1}{ax^a} \Big|_y^{\infty} dy = \int_0^{\infty} \frac{-\ln(1+y)}{a\, y^{a+1}} dy = \begin{vmatrix} u = \ln(1+y) & du = \dfrac{dy}{1+y} \\ dv = -\dfrac{dy}{a\, y^{a+1}} & v = \dfrac{1}{a^2 y^a} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\ln(1+y)}{a^2 y^a} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^a(1+y)} = -\frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{y^{(1-a)-1}}{1+y} dy = \left\| \int_0^{\infty} \frac{y^{b-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin \pi b} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \frac{\pi}{\sin(\pi - \pi a)} = -\frac{1}{a^2} \frac{\pi}{\sin \pi a}; \qquad I\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{100}{\sin \pi/10} = -200\pi\Phi.$$

Другие примеры интегралов от $A(x)\,\mathrm{Li}_2(-cx)$ приведены в приложении 4.



$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{\sqrt[10]{x^{11}}}\,dx = -200\,\pi\Phi \;\approx\; -1016{,}6}$$

7) Дополнительная подборка базовых интегралов с непосредственным участием дилогарифмов [21, с. 59-61]:

п.2 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\frac{b_1}{a}\ln\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln^2\frac{b_1}{a} + \mathrm{Li}_2\left(\frac{b_2}{b_1}\right)\right), \quad b_{1,2} = \sqrt{x^2+a^2} \pm x;$

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx \quad\to\quad I(2) = -\left(\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\right)^2; \quad I\left(\frac{1}{2}\right) = -6\ln\Phi\ln 2 + \frac{9}{2}\ln^2\Phi + \frac{\mathrm{Li}_2(\phi^6)}{2} - \frac{\pi^2}{12};$$

п.5 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln[1+\phi(1-x)]}{1-\phi x}\,dx = \frac{1}{2\phi}\mathrm{Li}_2(\phi^2) = \frac{\Phi}{2}\left(\frac{\pi^2}{15} - \ln^2\Phi\right) \approx 0{,}3450;$

п.13 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}(\sqrt{5}x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \ln^2\Phi - \mathrm{Li}_2(-\phi)\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi^2}{10} - 2\ln^2\Phi\right) \approx 1{,}9617;$

п.15 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}(\sqrt{5}x)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sqrt{5}\ln\Phi - \ln^2\Phi - 2\mathrm{Li}_2(-\phi)\right) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{3\pi^2}{10} - \sqrt{5}\ln\Phi - 2\ln^2\Phi\right) \approx 0{,}5583;$

п.19 $\displaystyle\int_0^{a} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = \mathrm{Li}_2(a) - \mathrm{Li}_2(-a)\,;\, a=\phi \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\phi} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2}\ln^2\Phi \approx 1{,}2976;$

п.24 $\displaystyle J(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\left[\frac{\pi^2}{12} + \mathrm{Li}_2\left(\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}\right)\right];$

$$J(2) = -\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-\phi^6), \qquad J\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - 2\,\mathrm{Li}_2(-\phi^2).$$

8) Золотой интеграл с дилогарифмом, "на закуску".

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}\,dx = \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}\,dx = I_1 + I_2;$$

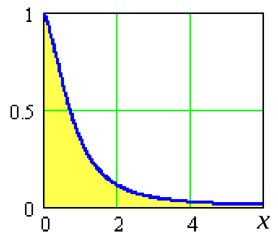
$$I_1 = \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}\,dx = \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx - \int_0^{1} x\,\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = -\mathrm{Li}_2(-1) - \boldsymbol{J};$$

$$I_2=\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\left(1+x^2\right)}dx=\left|\begin{matrix} x=1/t \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}\end{matrix}\right|=-\int_1^0 \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{1}{t}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}\frac{dt}{t^2}=\int_0^1 t\,\frac{\ln(1+t)-\ln t}{1+t^2}dt \overset{t\to x}{=} \boldsymbol{J}-\int_0^1\frac{x\ln x}{1+x^2}dx\,;$$

$$I=I_1+I_2=-\mathrm{Li}_2(-1)-\int_0^1\frac{x\ln x}{1+x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x & dv=\dfrac{x\,dx}{1+x^2} \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\mathrm{Li}_2(-1)-\underbrace{\frac{1}{2}\ln x\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1}_{\to\mathbf{0}}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx=-\mathrm{Li}_2(-1)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx=$$

$$\overset{\mathbf{x^2\to x}}{=}-\mathrm{Li}_2(-1)+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=-\frac{5}{4}\mathrm{Li}_2(-1)=\frac{5}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12}=\left(\Phi-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{12}\,.$$



$$\int_0^\infty\frac{\ln(1+x)}{x\left(1+x^2\right)}dx=\left(\Phi-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{12}\approx 1{,}0281$$

9) "На десерт", несколько интегралов общего вида с дилогарифмами [21, с. 59-60], которые путем подстановки параметров $b\ge a>0$ становятся "золотыми":

$$\int_0^\infty\frac{\ln(1+x)}{x(a+x)}dx=\frac{1}{a}\left[\frac{\pi^2}{6}-\mathrm{Li}_2(1-a)\right]\quad\overset{a=\phi}{\Rightarrow}\quad\int_0^\infty\frac{\ln(1+x)}{x(\phi+x)}dx=\Phi\left(\frac{\pi^2}{10}+\ln^2\Phi\right);$$

$$\int_0^\infty\frac{\ln(1+x)}{x(a+x)^2}dx=\frac{1}{a^2}\left[\frac{\pi^2}{6}-\mathrm{Li}_2(1-a)+\frac{a\ln a}{1-a}\right]\overset{a=\phi}{\Rightarrow}\int_0^\infty\frac{\ln(1+x)}{x(\phi+x)^2}dx=\Phi^2\left[\frac{\pi^2}{5}+\ln^2\Phi+\Phi\ln\phi\right];$$

$$\int_0^a\mathrm{arctg}\frac{x}{b}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mathrm{Li}_2\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)=\left|\begin{matrix}a=2\\ b=1\end{matrix}\right|\Rightarrow$$

$$\int_0^2\frac{\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\mathrm{Li}_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\mathrm{Li}_2(\phi)-\mathrm{Li}_2(-\phi)=\frac{1}{3}\pi^2-\frac{3}{2}\ln^2\Phi\,.$$

Некоторые общие свойства

1. Для многих степеней константы золотого сечения нет точных значений дилогарифма, зато есть точные разности, например:

$$\mathrm{Li}_2\left(\phi^3\right)-\mathrm{Li}_2\left(-\phi^3\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{2}-\ln^2\phi^3\right).$$

2. Леонард Левин выполнил замечательное обобщение в виде 67 дилогарифмических тождеств [22], известных как лестницы, в том числе с золотым сечением:

$$\mathrm{Li}_2\left(\phi^6\right)=4\,\mathrm{Li}_2\left(\phi^3\right)+3\,\mathrm{Li}_2\left(\phi^2\right)-6\,\mathrm{Li}_2(\phi)+\frac{7}{30}\pi^2.$$

Было также открыто удивительное дополнительное тождество [23] для π^2:

$$\pi^2=36\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)-36\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)-12\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{8}\right)+6\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{64}\right).$$

3. Основообразующий квадратный трехчлен x^2-x-1 золотой пропорции с корнями $(-\phi,\Phi)$ и логарифм вкупе образуют любопытный определенный интеграл:

$$\boxed{\int_0^e\left(x^2-x-1\right)\ln x\,dx=\frac{1}{6^2}e^2\left(2^3e-3^2\right)\approx 2{,}6162\ \approx\ \Phi^2}.$$

Вместо заключения

Золотая пропорция приводится к простейшему квадратному уравнению, поэтому константа золотого сечения органично вписывается в дилогарифмы, которые, в свою очередь, основаны на квадратичном (двойном) представлении $\mathrm{Li}_2(x)=\sum\limits_{k\geq 1}\frac{x^k}{k^2}$.

Принцип, лежащий в основе двойного отношения «да – нет», «вкл. – выкл.», известен тысячи лет и, по сути, является простым и одновременно многогранным по смыслу двоичным кодом-отношением 0 – 1.

Посмотрите на многообразие компьютерных фракталов, цветных изображений с миллионными оттенками и др. Это всё бинарная оцифровка.

В то же время способы передачи и хранения информации не перестают нас удивлять.

Они уже давно перешагнули реальные возможности человеческого мозга, который приспособлен в основном для решения конкретных биологических задач и отчаянно сопротивляется любому нецелевому использованию.

Обременяться лишней работой он не любит и не очень-то хочет.

К тому же сильно лимитирован в своих физиологических возможностях (скорость метаболизма ограничена) и не приспособлен к большим энергетическим затратам.

Мозг человека весьма слабый и очень приближенный инструмент по части математически точного отображения абстрактных мыслеформ.

Одним из первых двоичных кодов на земле был древнекитайский символизм "инь-ян" и построенное на его основе учение о дуализме, как непременный элемент диалектических построений в китайской философии, включая современные воззрения.

Троично-концептуальные модели обычно соотносятся с теологией (богословием) и религиозной философией.

Хотя тройка больше двух, а деление на три – не менее популярный мотив, чем раздвоение, тернарная модель (от лат. *ternarius* тройная, состоящая из трех частей) в действительности не поднимается над ситуацией, поскольку главной опорой служит не мышление, а вера. То есть триалектика, как и любая другая полилектика, не обобщает диалектику, а остается её частным случаем первого или начального уровня.

Как иногда бывает: слово есть, науки нет. А её место занимают патетически-пафосные формулировки.

В диалектике нет борьбы. Борьбу противоположностей придумал триумвират известных материалистов, – «гора родила мышь».

У Гегеля два взаимодополняющих первоначала взаимодействуют!

А «третье – единство обоих» (Платон). Как неотъемлемый результат взаимодействия, но не самостоятельный элемент.

Форма синусоидальной "спирали" $r=\sqrt[n]{\sin n\theta}$ зависит от двух (!) параметров: рационального числа $n\neq 0$ и угла отклонения θ радиус-вектора точки r, с его необычайной широтой описания разнообразных линий: прямая $n=-1$, окружность $n=1$, гипербола $n=-2$, парабола $n=-1/2$, кардиоида $n=1/2$, логарифмическая спираль $n\to 0$, множество кривых лепесткового характера $n\geq 2$ и др.

Также как тернарная операция программирования с условием: $[p,\ q,\ r]$ – если p, то q, иначе r. Вроде звучит как три, но на самом деле осуществляется выбор между двумя, дополненный некоторым условием. Операция возвращает один из двух операндов в зависимости от логического условия. Аналогом такой тернарной операции в математической логике и булевой алгебре является условная дизъюнкция.

Основным остается диалектический закон движения. Остальные производные "лектики" обслуживают его, внося дополнительные весьма полезные описательные характеристики. Но не более того. Все они обратным ходом сводимы снова к диалектике.

Как интегрирование возвращает нас к первообразной функции с точностью до константы, которая изменяет подуровни, но нисколько не меняет характер основного закона изменения (движения).

«От диалектики к поли(а)лектике и назад ... в будуще» [6].

Диалектика – учение о всеобщей связи, научный метод познания действительности в её противоречивости, целостности и развитии. Живая мелодия ритма жизни.

В диалектике прогресса хорошие вести сопровождаются дурными (К.Уилбер).

C'est la vie...

Есть диалог, "триалога" нет, вместо него "базар" когда все говорят, и никто никого не слушает.

Также как слово не может "победить" буквы, из которых само же состоит.

Слова придуманы для удобства общения, но не для его замены.

Буквы являются знаками слов, тогда как сами слова – знаками того, что мы мыслим.

Мысли укладываются в наборы слов. Наборы слов – в последовательность букв. Последовательность букв – в информацию. А вся информация – ужимается в цепочки бинаров "0–1".

«В начале было слово...» – это художественно-стилистическая семантика отдельной единицы, вмещающей в себя понятие "всё". Но перед ним «в самом начале, вне времени, состоялось глубокое раздумье: быть или не быть?».

Чтобы заявить о себе и собственном могуществе, Бог выбрал первое, исходя из собственного тождества "$0 \equiv 1$", $0! = 1$ или $0^0 = 1$. С него всё и пошло. Вместе с первоосновой или дилеммой выбора: быть (1) – не быть (0).

Одно немыслимо и неотделимо от другого. Их овеществленным образом стали разноплановые религиозные символы, включая иконы, которые являют нам зеркально-бинарное чувственное отражение (греч. εἰκών) небесного в земном, ведущее по замыслу ваятелей-художников в духовный мир.

К слову, привычное равенство – это бинарное отношение и наиболее логически сильная разновидность отношений эквивалентности. При этом транзитивная связь трех элементов – свойство бинарного отношения.

Новомодные модели триединства, тройственного взаимодействия с претензией на новую парадигму в своей основе остаются бинарными с транзитивным отражением.

Что-то принципиально новое, выше уровня диалектики, они не вносят, поэтому не известно ни одной задачи, решенной на их основе.

Само слово «Пара-дигма» – "две дигмы" (от древнегреческого δίγμα” (**dígma)** знак, отметка). Пара- (греч. *πᾰρά* «возле, около, вне; наряду), два однородных объекта, рассматриваемые как единое целое.

«…Пистолетов пара, две пули – больше ничего» (А.Пушкин, Евгений Онегин).

«Тройственная парадигма» – пример откровенной словесной неряшливости.

Равно как, «диадная парадигма» буквально означает масло масленое.

Есть постановка задачи, есть её решение или отсутствие оного, которое также воспринимается решением. Всё! При этом количество координат может быть ≥ 2.

Так, классическая форма ограниченных возможностей описывает баланс:

содержание проекта – стоимость – время – качество.

Или трехмерное пространство, привычное нам и кажущееся очевидным, – всего лишь удобная геометрическая модель материального мира и Вселенной, контуры которой могут приближаться к плоскостной, напоминая гигантский спрессованный бублик. Никакое пространство и/или время само по себе не существует, как особая физическая сущность.

В ограниченных масштабах превалирует 3-мерность, видимо, как следствие энергетического состояния связных систем с наименьшей энергией. При этом многие физические законы, хотя и вытекают из размерности, равной трем, имеют характер обратных квадратов, подобно структурному оформлению дилогарифмов.

«Мы живем в двоичном коде. Мы закодированы на двоичность. Теза и антитеза удерживают мир в равновесии и укрывают в своей складке истину. Природа состоит из органического и неорганического вещества. Бытие спорит с сознанием, добро борется со злом. Инь и ян, дух и материя – "разгул" диалектики. Материализм и идеализм в философии: вечное Слово Божие или пульсация вечной материи, – что дало начало миру? Двоичность заложена в каждом элементе мира, на ней зиждется макро- и микрокосмос. Клетка делится надвое – зарождается Жизнь» [24].

Био- от др.-греч. βίος *жизнь*. Клетки делятся (дифференцируются) и одновременно объединяются (интегрируются) в согласованные живые ткани, органы и системы.

Венцом отношений становится золотое сечение, а точнее его симметричная пара. Как незримый "соединитель" взаимодействий между объектами и процессами, для которых проще или меньше двух не бывает, а сложнее – природе не нужно.

Как часто повторяет Анатолий Никифоров (http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0981-00.htm), с его красивой моделью цветоформ в виде трех триад 3×3 (почему бы и нет!):

«С любовью к истине»...

Величие природы не терпит суеты,
Жизнь для неё и вечность и мгновенье...

Приложение 1

Интегралы с интегральным логарифмом

Интегральный логарифм – специальная функция, которая не выражается в конечной форме через элементарные функции и определяемая интегралом (Л.Эйлер) $\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

Он играет важную роль в исследовании распределения простых чисел.

В порядке общего обзора приведем два определенных интеграла с интегральным логарифмом [25]:

$$\int_0^1 \operatorname{li} x\,dx = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{dy}{\ln y} = \int_0^1 dy\int_y^1 \frac{dx}{\ln y} = \int_0^1 \frac{1}{\ln y}\cdot x\Big|_y^1 dy = \int_0^1 \frac{1-y}{\ln y}dy = \begin{vmatrix} y=e^{-t} \\ \ln y=-t \end{vmatrix} = \int_\infty^0 \frac{1-e^{-t}}{-t}\left(-e^{-t}\right)dt =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t}e^{-t}dt = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt = -\ln 2 \qquad \left\| \int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a} \right\|;$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{li} x}{\sqrt{-\ln x}}\frac{dx}{x} \Rightarrow \int_0^1 \operatorname{li} x\frac{(-\ln x)^{p-1}}{x}dx = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{(-\ln x)^{p-1}}{x}\frac{1}{\ln t}dt = \int_0^1 dt\int_t^1 \frac{(-\ln x)^{p-1}}{x}\frac{1}{\ln t}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{\ln t}dt\int_t^1 \frac{(-\ln x)^{p-1}}{-x}dx = \left|\frac{dx}{-x} = (-\ln x)'dx = -d(-\ln x)\right| = \int_0^1 \frac{-1}{\ln t}dt\int_t^1 (-\ln x)^{p-1}d(-\ln x) =$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{\ln t}\cdot\frac{(-\ln x)^p}{p}\Bigg|_t^1 dt = \int_0^1 \frac{-1}{\ln t}\cdot\frac{-(-\ln t)^p}{p}dt = -\frac{1}{p}\int_0^1 (-\ln t)^{p-1}dt = \begin{vmatrix} x=-\ln t \\ t=e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{p}\int_\infty^0 x^{p-1}\left(-e^{-x}\right)dx = -\frac{1}{p}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = -\frac{1}{p}\Gamma(p); \quad p=\frac{1}{2} \Rightarrow -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Приложение 2

Пример определенного интеграла, содержащего слагаемые с числами π и π^2:

$$\boldsymbol{I} = \int_0^\infty \frac{\ln x\cdot x^{m-1}}{\left(1+x^n\right)^2}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty x^{m-n}\ln x\frac{n\,x^{n-1}dx}{\left(1+x^n\right)^2} = \begin{vmatrix} u=x^{m-n}\ln x, & dv=\dfrac{n\,x^{n-1}dx}{\left(1+x^n\right)^2} \\ du=x^{m-n-1}[(m-n)\ln x+1], & v=-\left(1+x^n\right)^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{n}\cdot\frac{x^{m-n}\ln x}{1+x^n}\Bigg|_{+0}^\infty}_{\to 0} + \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{x^{m-n-1}dx}{1+x^n} + \frac{m-n}{n}\int_0^\infty \frac{x^{m-n-1}\ln x\,dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\boldsymbol{I_1} + \frac{m-n}{n}\boldsymbol{I_2};$$

$$\boldsymbol{I_1} = \int_0^\infty \frac{x^{m-n-1}dx}{1+x^n} = \begin{vmatrix} x^n=t, & x=t^{1/n} \\ nx^{n-1}dx=dt & \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\left(\frac{m}{n}-1\right)-1}}{(1+t)^{\left(\frac{m}{n}-1\right)+2-\frac{m}{n}}}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(2-\frac{m}{n},\frac{m}{n}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(2-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}-1\right) = \frac{\pi}{n}\cdot\csc\pi\frac{2n-m}{n} = -\frac{\pi}{n}\cdot\csc\frac{\pi m}{n};$$

$$f(a)=\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{1+x^n},\quad f'(a)=\int_0^\infty \frac{x^a \ln x\,dx}{1+x^n},\quad \underline{I_2=f'(0);}\qquad \bar{a}=\frac{a+1}{n}$$

$$f(a)=\left|\begin{matrix} x^n=t, & x=t^{1/n} \\ nx^{n-1}dx=dt & \end{matrix}\right|=\int_0^\infty \frac{t^{a/n}}{1+t}\cdot\frac{dt}{n\,t^{1-1/n}}=\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\bar{a}-1}dt}{(1+t)^{\bar{a}+1-\bar{a}}}=\frac{1}{n}\mathrm{B}(\bar{a},1-\bar{a})=\frac{1}{n}\Gamma(\bar{a})\Gamma(1-\bar{a})=$$

$$=\frac{\pi}{n}\cdot\csc\frac{\pi\bar{a}}{n};\quad f'(a)=-\frac{\pi}{n}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi\bar{a}}{n}\csc\frac{\pi\bar{a}}{n}\cdot\frac{\pi}{n},$$

$$\boldsymbol{I_2}=f'(m-n-1)=-\frac{\pi^2}{n^2}\cdot\mathrm{ctg}\,\pi\frac{m-n}{n}\csc\pi\frac{m-n}{n}=\frac{\pi^2}{n^2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi m}{n}\csc\frac{\pi m}{n};$$

$$\boldsymbol{I}=\frac{1}{n}\boldsymbol{I_1}+\frac{m-n}{n}\boldsymbol{I_2}=\frac{1}{n^2}\cdot\csc\frac{\pi m}{n}\cdot\left(\pi^2\frac{m-n}{n}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi m}{n}-\pi\right),$$

где $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(t+1)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ – бета-функция, которая связана с гамма-функцией $\Gamma(z)$ с её отличительным рекуррентным уравнением $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ и формулой дополнения Эйлера $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\pi\cdot\csc\pi z$.

Используя общую форму для интеграла $\boldsymbol{I}$, находим частные золотые интегралы пятого порядка (n = 5), в которые одновременно входят числа π и π^2

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\cdot x^5}{(1+x^5)^2}dx=\frac{2}{25}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2-\phi}}-\frac{\pi^2}{5}\cdot\frac{\Phi}{2-\phi}\right)\approx 0{,}02890;$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\cdot x^{10}}{(1+x^{10})^2}dx=\frac{\Phi}{50}\left(\pi-\frac{\pi^2}{10}\cdot\Phi^2\sqrt{2-\phi}\right)\approx 0{,}003367;$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\cdot x^5}{(1+x^{10})^2}dx=\frac{\phi}{50}\left(\frac{\pi^2 4}{10}\cdot\frac{\phi^2}{2-\phi}-\frac{\pi}{\sqrt{2-\phi}}\right)\approx -0{,}01955.$$

Полученные решения, возможно, выглядят не очень эффектно и компактно.

Не столь важно. Главное – их золотоносное содержание, а не внешний лоск.

Модели на подиуме тоже не блещут эмоциями во время показа, что позволяет переключать-сосредотачивать внимание гостей на демонстрируемую одежду.

Степени в последних функциях перекликаются с монографией нашего соавтора Андрея Ковалева «В поисках пятого порядка», которая посвящена проявлениям закономерностей золотого сечения и симметрии пятого порядка в различных областях знаний.

«Впрочем, чего его искать, поди, не клад, но красивый художественный образ.

Скорее речь идет о выявлении-обнаружении, ибо пятый порядок повсюду и кругом.

Нужно только внимательно присмотреться. Плюс немного фантазии, воображения.

Ну, и конечно, везения. Без него никак. Многие ходят вокруг да около, только госпожа удача улыбается не всем. *C'est la vie...*» [26].

Приложение 3

Примеры интегралов, определяемых через ряды

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}dx = \int_0^\infty x\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}dx = \int_0^\infty x\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{1-e^{-2x}}dx = \int_0^\infty x\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)\sum_{n\ge 0} e^{-2nx}dx =$$

$$= \sum_{n\ge 0}\underline{\int_0^\infty xe^{-(2n+1)x}dx} - \sum_{n\ge 0}\underline{\int_0^\infty xe^{-(2n+2)x}dx} = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+2)^2} \pm \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+2)^2} =$$

$$= \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+2)^2} - 2\sum_{n\ge 0}\frac{1}{4(n+1)^2} = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x}\frac{dx}{1-e^{-x}} = \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x}\sum_{n\ge 0} e^{-nx}dx = \sum_{n\ge 0}\int_0^\infty x^s e^{-(n+1)x}dx = \left|\begin{array}{l} u=(n+1)x \\ du=(n+1)dx \end{array}\right| =$$

$$= \sum_{n\ge 0}\int_0^\infty \left(\frac{u}{n+1}\right)^s e^{-u}\frac{du}{n+1} = \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^{s+1}}\cdot\int_0^\infty u^{(s+1)-1}e^{-u}du \;=\; \zeta(s+1)\cdot\Gamma(s+1).$$

Приложение 4

Интегралы от $A(x)\,\mathrm{Li}_2(-cx)$

В справочнике [10, п. 2.5.3] приведены определенные интегралы от подынтегральной функции с дилогарифмом и изменяемым параметром a (вещественным или комплексным):

$$\int_0^a x^{n-1}\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{a^n}{n^2}\left(\frac{\pi^2 n}{6} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right), \qquad \int_0^a \mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right), \qquad a>0;$$

$$\int_0^a \frac{1}{x-b}\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{b}\left[\frac{\pi^2 a}{6(b-a)} - \mathrm{Li}_2\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(1-\frac{a}{b}\right)\right], \qquad 0<a<b;$$

$$\int_0^a \frac{\mathrm{Li}_2(-ax)}{\sqrt{x}(x+z)}dx = \frac{4\pi}{\sqrt{z}}\mathrm{Li}_2\left(-\sqrt{az}\right), \qquad |\arg a|, |\arg z| < \pi.$$

Литература:

1. Василенко С.Л. Формальные модели-имитации троичности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23876, 25.10.2017. – URL: http://www.trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261285.htm.

2. Василенко С.Л. Неортодоксальная метафорическая формула Бога и парадоксы веры // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26837, 17.12.2020. – URL: http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164571.htm.

3. Василенко С.Л. Эйдосы Лосева-Сахно, бесконечности и отрицательные числа в метафорической формуле Бога // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ. 26874, 01.01.2021. – URL: http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164588.htm.

4. Сахно В.А. Комментарии к «Закону Бога» С.Л. Василенко // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26849, 24.12.2020. – URL: http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164578.htm.

5. Никитин А.В. О диалектике, триадологии, триалектике и формализации философии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28772, 27.12.2023. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165487.htm.
6. Василенко С.Л., Никитин А.В. От диалектики к поли(а)лектике и назад ... в будущее // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16329, 01.02.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261102.htm.
7. Brown C. The Natural Logarithm of the Golden Section // Fibonacci Quarterly, 2017, **55** (5), 42-44.
8. Vajda S. Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section, Dover Publications, Inc., New York, 2008.
9. Weisstein E.W. Dilogarithm. – From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – 2-е изд., исправ. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. – 2-е изд., исправ. – М.: Физматлит, 2002. – 632 с.
12. Polylogarithm / From Wikipedia, the free encyclopedia. – https://en.wikipedia.org/wiki/Polylogarithm.
13. Feynman Integration Example 36 / Feynman Technique, 01.01.2024. – https://www.youtube.com/watch?v=KENPhH5DqeE.
14. The on-line encyclopedia of integer sequences – https://oeis.org/.
15. Logarithm integral with golden ratio / Mathematics Stack Exchange, 20.08.2013. – https://math.stackexchange.com/questions/471672/.
16. Математика. Неопределенный интеграл. – https://math24.biz/integral.
17. WolframAlpha / Mathematics / Calculus & Analysis. – https://www.wolframalpha.com.
18. Why are we finding pi here? / Michael Penn, 26.04.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=amL2uBK2buU.
19. Golden Dilogarithm Integral / Gamma Digamma 12.08.2020. – https://www.youtube.com/watch?v=-rKKZcLQiE4.
20. Интеграл с дилогарифмом и иррациональной степенью / Hmαth, 21.06.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=pmuFPRiNgjc.
21. Дунаев А.С., Шлычков В.И. Специальные функции: учеб. пособие. – Екатеринбург: УрФУ, 2015. – 1322 с.
22. Lewin L. Structural Properties of Polylogarithms. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
23. Bailey D.H., Broadhurst D.J. Parallel integer relation detection: techniques and applications // Math. Comput., 2001, **70**, 1719-1736.
24. Философский театр Аркадия Раскина / Искусство в двоичном коде. – https://www.arkadijraskin.com/.
25. Интеграл от интегрального логарифма / Hmath, 13.06.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=uwJDS-y1-A8; интеграл с логарифмом и интегральным логарифмом / Hmath, 20.06.2022. – https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=DErgtcLax-M.
26. Василенко С.Л. Интегральное исчисление с константой золотого сечения. Часть 3. Божий промысел тригонометрии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28773, 27.12.2023. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165488.htm.

Украина, Харьков