

Тригонометрический подход к золотому и экспоненциальному сечениям

Три гонома как три гнома
чудеса творят...

Вместо вступления.

История тригонометрии насчитывает более двух тысячелетий. Берет начало от прикладной астрономии, навигации и геометрических вычислений, в основном для элементов треугольника. Отсюда и родился прижившийся термин (от *trigwnon* треугольник, *metrew* измеряю), которому ~400 лет.

Через углы и пропорции современная тригонометрия (плоскостная, сферическая) помогает нам лучше понять мир, его геометрические и физические закономерности.

Классический пример – теорема синусов: стороны евклидова треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Казалось бы, какие-то 3 угла, 3 стороны. Но они порождают множество замечательных взаимосвязей. Только особые центры треугольника, описанные в энциклопедии ЕТС, насчитывают 52 тысячи!

Мы же остановимся на том, как взаимосвязь тригонометрических функций порождает золотое сечение (ЗС). Рассмотрим также новое понятие экспоненциального деления.

Золотое сечение в тригонометрическом представлении.

Хорошо известно нахождение числовой константы золотого сечения через значения косинуса и синуса углов 36 и 54 градуса, характерных для правильного пятиугольника:

$$\Phi = 2 \cos \pi/5 = 2 \sin 3\pi/10.$$

Если в прямоугольнике с отношением сторон 1:2 поделить пополам угол между диагональю и меньшей стороной, то получим формулу

$$\phi = \Phi^{-1} = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Идем дальше... С ростом угла в пределах $0 \div 90^\circ$ косинус уменьшается от 1 до нуля, тангенс увеличивается от 0 до бесконечности. Функции непрерывные, значит, пересекаются.

Равенство $\operatorname{tg} \theta = \cos \theta$ наглядно иллюстрируется в прямоугольном треугольнике в виде пропорции сторон, что приводит к замечательному треугольнику Кеплера [1–4] (рис. 1):

$$\operatorname{tg} \theta = \cos \theta \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{1} \rightarrow b = \sqrt{a} = \sqrt{1-a^2} \rightarrow a^2 + a - 1 = 0, \quad a = \phi.$$

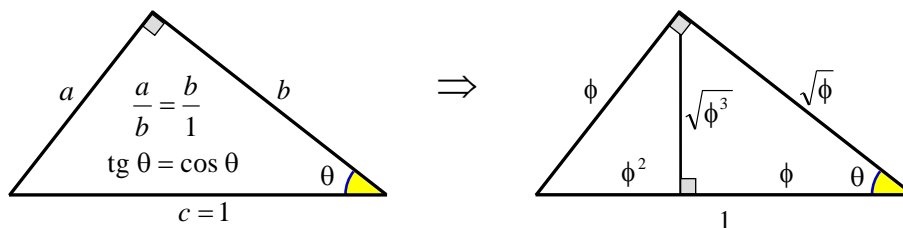


Рис. 1. Прямоугольный треугольник Кеплера, в котором соблюдается равенство $\operatorname{tg} x = \cos x$ для острого угла $x = \theta$

Функции косинуса и тангенса – периодические и имеют бесконечное число точек пересечения, координаты которых непосредственно связаны с константой золотого сечения $\Phi = \phi^{-1} = (1 + \sqrt{5})/2$ на основе простых преобразований (рис. 2):

$$\text{tg } x = \cos x \rightarrow \sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \quad \sin x = \phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} :$$

$$x = \theta = \arcsin \phi \approx 0,6662 \approx 38,17^\circ .$$

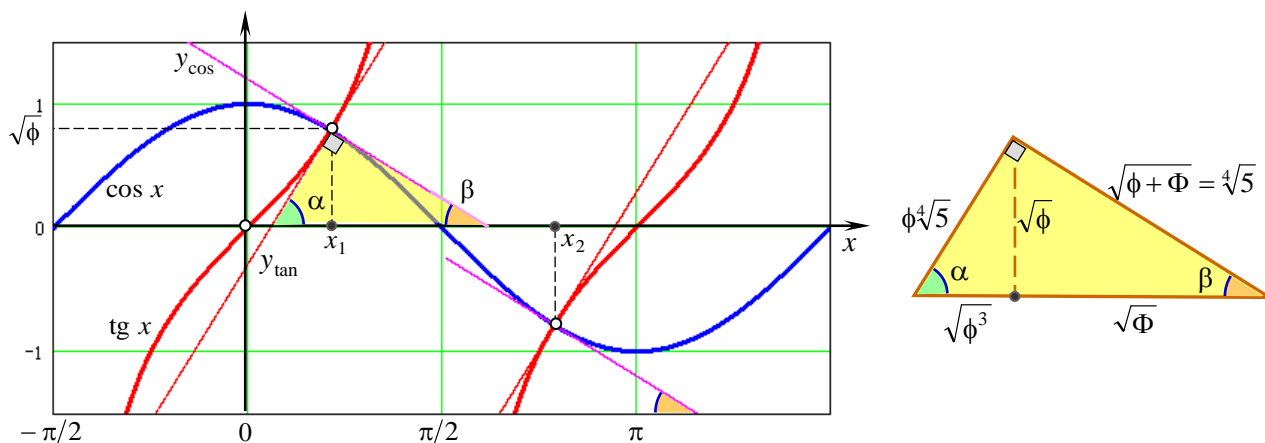


Рис. 2. Золотое сечение в интерпретации периодических тригонометрических функций $\cos x$ и $\text{tg } x$

Отсюда находим координаты точки пересечения $x_i, i = 1, 2$:

$$x_1 = \arcsin \phi \approx 0,6662 ; \quad x_2 = \pi - \arcsin \phi \approx 2,4754 ; \quad \cos x_i = \text{tg } x_i = \pm\sqrt{\phi} \approx 0,7862 ;$$

углы наклона касательных в точках пересечения:

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\cos^2 x_i} = \frac{1}{\sin x_i} = \Phi ; \quad \text{tg } \beta = \sin x_i = \cos^2 x_i = \phi ;$$

$$\alpha = \arctg \Phi \approx 58,28^\circ ; \quad \beta = \arctg \phi \approx 32,72^\circ ; \quad \alpha + \beta = \pi/2 ;$$

уравнения касательных в точке пересечения x_1 :

$$y_{\text{tan}} = \sqrt{\phi} + \Phi(x - x_1) ; \quad y_{\text{cos}} = \sqrt{\phi} - \phi(x - x_1) .$$

Выделенный цветом треугольник – прямоугольный, как половина замечательного золотого прямоугольника, длины сторон которого находятся в золотом отношении $1:\Phi$.

Высота, опущенная из прямого угла на гипотенузу, разбивает исходный треугольник на два треугольника. Все они подобны между собой.

Например, составная пропорция по длинам катетов:

$$\frac{\sqrt[4]{5}}{\phi\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\phi}} = \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi^3}} = \Phi .$$

Отличный результат, воедино связывающий треугольник Кеплера, золотой прямоугольный треугольник с катетами $1:\Phi$ и тригонометрические функции.

Попал в струю – плыви, или идем дальше *step by step*...

Гиперболические функции.

Гиперболические функции (Муавр, Риккати, Ламберт) – семейство элементарных функций, которые выражаются через экспоненту и тесно связаны с тригонометрическими функциями [5].

Для удобства визуального восприятия (как слышится, так и пишется) воспользуемся обозначениями, которые приняты в англоязычной литературе [6], а также применяются в современных системах компьютерной математики (MathCAD и др.) и распространенных редакторах математических формул (Microsoft Word др.).

Непонятно, зачем вообще стали удалять гласные буквы, в ущерб наглядности и читабельности $\sinh x$ (sh x), $\coth x$ (cth x), $\operatorname{sech} x$ (sch x)...

Лишь бы как-то вывернуть на свой лад? – Ох уж этот местечковый патриотизм и псевдо традиции, которые уже давно никого в мире не вдохновляют и не обогащают.

Более важен мировой опыт по универсализации хорошо продуманных обозначений.

«Удачное обозначение освобождает мозг от ненужной работы, тем самым позволяя ему сосредоточиться на более важных задачах» (британский математик Alfred Whitehead).

Рассмотри гиперболический синус $\sinh x$ и гиперболический котангенс $\coth x$:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Графики функций пересекаются в точках с абсциссами $\pm x_1$ (рис. 3).

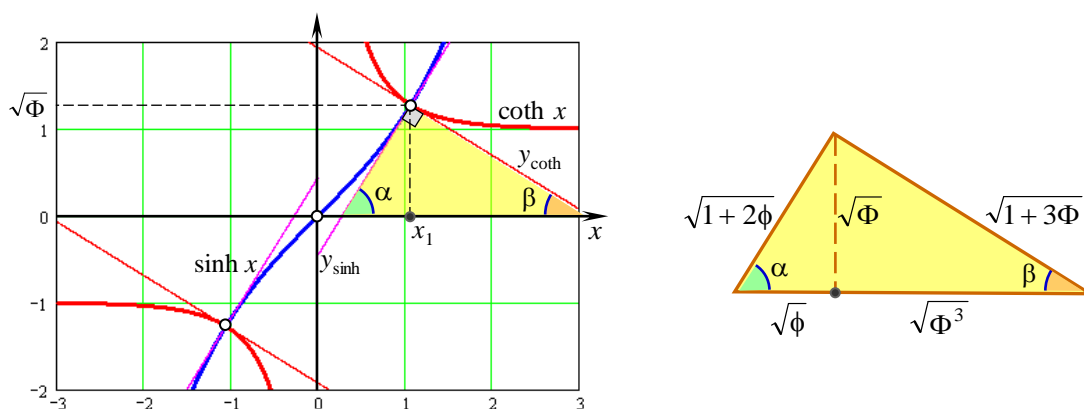


Рис. 3. Золотое сечение в интерпретации гиперболических функций $\sinh x$ и $\coth x$

Координаты точки пересечения x_1 :

$$x_1 = \operatorname{acosh} \Phi \approx 1,0613 ; \quad \sinh x_1 = \coth x_1 = \sqrt{\Phi} \approx 1,2720 ;$$

углы наклона касательных:

$$\operatorname{tg} \alpha = \cosh x_1 = \sinh^2 x_1 = \Phi ; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\cosh x_1} = \frac{1}{\sinh^2 x_1} = \phi ;$$

уравнения касательных в точке пересечения x_1 :

$$y_{\coth} = \sqrt{\Phi} - \phi(x - x_1) ; \quad y_{\sinh} = \sqrt{\Phi} + \Phi(x - x_1) .$$

Высота, опущенная из прямого угла на гипотенузу, разбивает исходный треугольник на два треугольника. Все они подобны между собой.

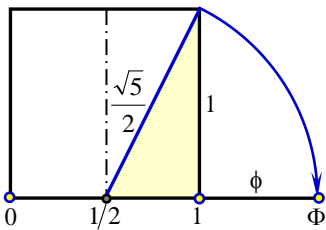
Например, составная пропорция по длинам катетов:

$$\frac{\sqrt{1+3\Phi}}{\sqrt{1+2\phi}} = \frac{\sqrt{\Phi^3}}{\sqrt{\Phi}} = \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\phi}} = \Phi.$$

Достойный внимания результат, связывающий "золотой" треугольник Кеплера и гиперболические функции, основанные на экспонентах $e^{\pm x}$. Карбаемся по лестнице выше..

Прелюбопытный предел и экспоненциальное деление.

Хорошо известно геометрическое построение золотого отношения с использованием единичного квадрата 1×1 и встроеного в него прямоугольного треугольника с отношением катетов 1:2:



$$\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi.$$

Ключевым элементом для образования золотого сечения (ЗС) и собственно золотой константы является двойка, приводящая к корню из пяти: $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$.

Рассматривая тригонометрию ЗС с участием косинуса (см. рис. 2), весьма интересно проанализировать изменение степенной функции косинуса вблизи нулевого аргумента, то есть функции $f(x, p) = (\cos x)^{1/x^p}$.

Напрашивается интуитивно-логическое восприятие $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^p} \Rightarrow 1^\infty = 1$.

Но так ли это на самом деле? – Проверим аналитически.

Примем для определенности $p = 2$.

Используя разложение косинуса в ряд и следствие из второго замечательного тождества $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^t = e^{-a}$, вычислим предел [7]:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} &= \left| u = \frac{1}{x} \right| = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{u} \right)^{u^2} = \left\| \cos \frac{1}{u} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)! u^{2k}} = 1 - \frac{1}{2u^2} + O(u^{-4}) \right\| = \\ \left(\mathbf{1}^\infty \right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2u^2} \right)^{u^2} = \left| u^2 = t \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1/2}{t} \right)^t = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6065. \end{aligned}$$

Как видим, интуиция может подвести, поскольку она создает лишь предварительные гипотезы, которые нуждаются в проверке.

Отметим, что данный предел имеет место исключительно для параметра $p = 2$ (рис.4).

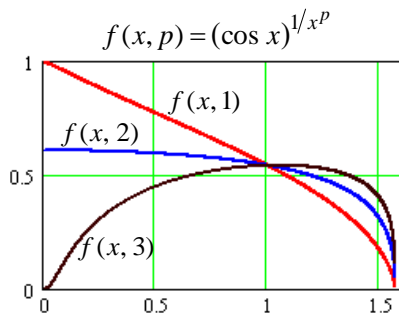
Величина $e^{-1/2} \approx 0,6065$ немногим отличается от малой золотой константы $\phi \approx 0,6180$.

Конечно, речь не идет о точном золотом сечении единичного отрезка.

Тем не менее, такое приближение весьма символично.

Экспонента отражает динамические свойства системы. Поэтому геометрическое представление назовем экспоненциальным сечением, по аналогии с ЗС.

Визуализация в масштабе показывает практическое совпадение золотого и экспоненциального сечений (рис. 5). Последнее незначительно больше, что соответствует общему принципу динамического развития системы.



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, p) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^p} = \begin{cases} 1 & , \quad p < 2; \\ e^{-1/2} & , \quad p = 2; \\ 0 & , \quad p > 2. \end{cases}$$

Рис. 4. Изменение функции $f(x, p) = (\cos x)^{1/x^p}$

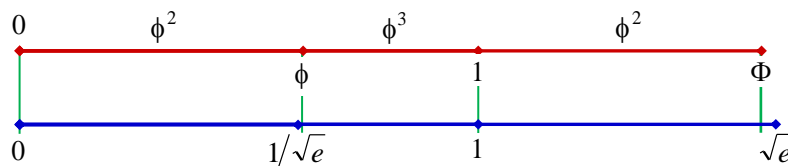


Рис. 5. Масштабированная визуализация золотого и экспоненциального сечений геометрического отрезка

Отметим некоторые замечательные свойства квадратного корня из числа e .

Для $\lambda = e^{-1/2}$ наибольший простой делитель случайного целого числа n с одинаковой вероятностью будет больше или меньше n^λ [8].

Кроме того [9], $\sqrt{e} \approx 1,6487$ максимизирует значение x^{c/x^2} для любой вещественной константы $c > 0$ и минимизирует его для отрицательной константы $c < 0$ при $x > 0$.

Имеет место разложение в бесконечный ряд:

$$\sqrt{e} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k)!!}.$$

Представление в виде непрерывной (цепной) дроби и "восходящей лесенки":

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7 + \dots}}}}; \quad 2\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7 + \frac{1}{9 + \dots}}}}; \quad \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}.$$

"Квадратичная" экспонента $e^{-x^2} (e^{-x^{1/2}})$ имеет широкое применение в науке, например:

- стандартное нормальное распределение (по Гауссу) $\varphi(x) = e^{-x^2} / \sqrt{\pi}$ с дисперсией $\sigma^2 = 1/2$ и нулевым математическим ожиданием;

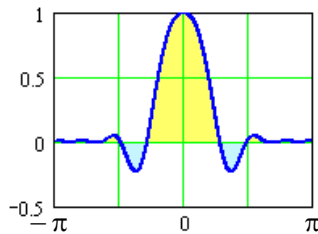
- функция ошибок $\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – неэлементарная функция, которая возникает

в ряде математических дисциплин: теория вероятностей, статистика, дифференциальные уравнения в частных производных и др.;

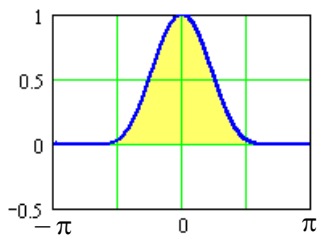
- гауссов интеграл (интеграл Эйлера–Пуассона) – интеграл от гауссовой функции $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, который в разных вариациях служит основным содержанием многих разделов современной теоретической физики.

В рамках проводимого анализа отдельный интерес представляет трио-объединение базовых математических констант { ПЕФ = π , e , Φ } в интегральном исчислении (отдельная тема будущей статьи), в частности:

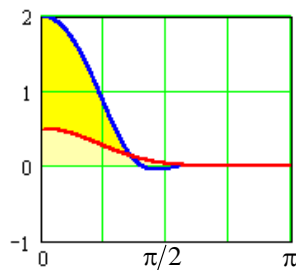
$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{a^2+1}+1}{a^2+1}};$$



$$I(2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{5}+1}{5}} = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \Phi \approx 1,0083$$

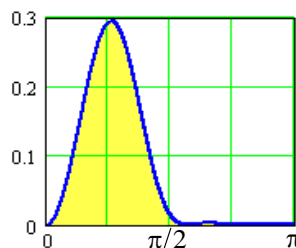


$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2/2) dx = \sqrt{\pi \frac{\sqrt{5}+2}{5}} = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \Phi^3 = I(2) \cdot \Phi \approx 1,6314$$



$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{\sin(2x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\pi\phi} \approx 1,3934$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{\sin(x^2/2)}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi\phi^3}}{2} \approx 0,4306$$



$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} \sin^2(x^2)}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\sqrt{\Phi} - 1) \approx 0,2411$$

Вместо заключения.

Умеющий читать – прочтет. Мыслящий домыслит. Что ещё сказать?

Электричество работает с частыми перебоями.

Но духовный свет не погасить. «И свет во тьме светит... Свет истинный, который просвещает всякого человека, приходящего в мир» (Ин. 1:5-9).

«Свет побеждает тьму» (Н.К.Рерих, 1933) и становится только ярче.

Так закаляется сталь, так укрепляется вера.

Огромную часть космического пространства занимает темная материя.

Однако свет главенствует! Хотя бы потому, что темнота не имеет собственного определения, а идентифицируется через отсутствие света, который поддается физическому измерению и наблюдению.

Литература:

1. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22385, 05.08.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm>.
2. Василенко С.Л. Золотой прямоугольник Кеплера: свойства, особенности и проявления // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22410, 18.08.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163027.htm>.
3. Василенко С.Л. Фибоначчиевый ряд золотых треугольников Кеплера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22546, 26.09.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163062.htm>.
4. Василенко С.Л. От экстремальных свойств треугольника Кеплера и золотого конуса – к возможному проецированию на пирамиды Древнего Египта // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22827, 16.12.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163163.htm>.
5. Янпольский А.Р. Гиперболические функции. – М.: Физматгиз, 1960. – 196 с.
6. Hyperbolic functions, Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001.
7. A very interesting limit problem / Math 505, 05.11.2023. – <https://www.youtube.com/watch?v=bHdJ1m84as0>.
8. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – <https://oeis.org/A092605>.
9. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – <https://oeis.org/A019774>.

