Н.Ф. Семенюта

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

Аннотация: Статья посвящена гиперболической функциям чисел Фибоначчи начала исследования которых были положены в работах Н. Ф. Семенюты, А. П. Стахова и И. С. Ткаченко, С. Л. Василенко, О. С. Боднара, С, П. Ясинского и др.[1–8], а также работах зарубежных ученых Z. Trzaska и др.[9–12].

В статье рассмотрены гиперболические функции последовательностей чисел Фибоначчи и Люка, связанные с простейшими характеристическими уравнениями $x^2 - x - 1 = 0$ и $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$. Установлены формулы взаимосвязи чисел Фибоначчи и Люка с золотым сечением, гиперболическими и показательными функциями. Получены последовательности гиперболических функций Фибоначчи и Люка и их свойства.

Ключевые слова: теория чисел, числа Фибоначчи, числа Люка, золотое сечение, характеристические уравнения, рекуррентные гиперболические функции типа Фибоначчи и Люка.

Последовательности чисел Фибоначчи и Люка

Числам Фибоначчи соответствует последовательность

$$\begin{array}{ccccccccccccc} F_{-6} & F_{-5} & F_{-4} & F_{-3} & F_{-2} & F_{-1} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \ldots, \\ -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \ldots, \end{array}$$

которая образуется по рекуррентному соотношению:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

Числа Фибоначчи являются также основой последовательности чисел Люка

$$\begin{array}{ccccccccccccc} L_{-6} & L_{-5} & L_{-4} & L_{-3} & L_{-2} & L_{-1} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 \ldots, \\ 18 & -11 & 7 & -4 & 3 & -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 \ldots, \end{array}$$

которая образуется по рекуррентному соотношению

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad L_0 = 2, \quad L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

Числа Фибоначчи и Люка связаны соотношениями:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \qquad F_{2n} = F_n L_n.$$

Отношения чисел Фибоначчи F_{n+1}/F_n и Люка L_{n+1}/L_n в пределе ($n \to \infty$) равны золотому сечению Ф = 1,618. В пределе также:

$$L_n = F_n\sqrt{5}, \qquad F_n = \frac{L_n}{\sqrt{5}}.$$

Из решения рекуррентной последовательности чисел Фибоначчи следуют формулы решения чисел Фибоначчи и Люка:

$$F_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}, \qquad L_n = x_1^n + x_2^n,$$

где x_1 и x_2 корни характеристического уравнения последовательностей чисел Фибоначчи и Люка.

Характеристическое уравнение Фибоначчи $x^2 - x - 1 = 0$

Простейшее характеристическое уравнение последовательности чисел Фибоначчи

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{1}$$

корни которого равны золотому сечению:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = \Phi, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618 = -\Phi^{-1},$$

Корни уравнения (1) связаны как с золотым сечением, так и показательными и гиперболическими функциями:

$$x_1 = \Phi = e^{\gamma} = \text{sh}\,\gamma + \text{ch}\,\gamma = 1{,}618, \qquad x_2 = -\Phi^{-1} = -e^{-\gamma} = \text{sh}\,\gamma - \text{ch}\,\gamma = -0{,}618,$$
$$\ln x_1 = \ln \Phi = 0{,}481 = \gamma, \qquad \ln x_2 = \ln(-\Phi^{-1}) = -0{,}481 = -\gamma,$$
$$\text{sh}\,\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \text{ch}\,\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Степени корней уравнения (1) также связаны с золотым сечением, показательными и гиперболическм\ими функциями:

$$x_1^1 = 1{,}618 = \Phi = e^{\gamma} = \text{sh}\,\gamma + \text{ch}\,\gamma, \qquad x_2^1 = -0{,}618 = -\Phi^{-1} = -e^{-\gamma} = \text{sh}\,\gamma - \text{ch}\,\gamma,$$
$$x_1^2 = 2{,}618 = \Phi^2 = e^{2\gamma} = \text{sh}\,2\gamma + \text{ch}\,2\gamma, \qquad x_2^2 = 0{,}382 = \Phi^{-2} = e^{-2\gamma} = \text{ch}\,2\gamma - \text{sh}\,2\gamma,$$
$$x_1^3 = 4{,}236 = \Phi^3 = e^{3\gamma} = \text{sh}\,3\gamma + \text{ch}\,3\gamma, \qquad x_2^3 = -0{,}236 = -\Phi^{-3} = -e^{-3\gamma} = \text{sh}\,3\gamma - \text{ch}\,3\gamma,$$
$$x_1^4 = 6{,}854 = \Phi^4 = e^{4\gamma} = \text{sh}\,4\gamma + \text{ch}\,4\gamma, \qquad x_2^4 = 0{,}146 = \Phi^{-4} = e^{-4\gamma} = \text{ch}\,4\gamma - \text{sh}\,4\gamma,$$
$$x_1^5 = 11{,}089 = \Phi^5 = e^{5\gamma} = \text{sh}\,5\gamma + \text{ch}\,5\gamma, \qquad x_1^5 = -0{,}071 = -\Phi^{-5} = -e^{-5\gamma} = \text{sh}\,5\gamma - \text{ch}\,5\gamma.$$

Разность и сумма корней уравнения (1):

$$x_1 - x_2 = 2{,}236 = F_1\sqrt{5} = \Phi + \Phi^{-1} = e^{\gamma} + e^{-\gamma} = 2\text{ch}\,\gamma,$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 2{,}236 = F_2\sqrt{5} = \Phi^2 - \Phi^{-2} = \text{e}^{2\gamma} - e^{-2\gamma} = 2\text{sh}\,2\gamma,$$
$$x_1^3 - x_2^3 = 4{,}472 = F_3\sqrt{5} = \Phi^3 + \Phi^{-3} = \text{e}^{3\gamma} + e^{-3\gamma} = 2\text{ch}\,3\gamma,$$
$$x_1^4 - x_2^4 = 6{,}705 = F_4\sqrt{5} = \Phi^4 - \Phi^{-4} = \text{e}^{4\gamma} - e^{-4\gamma} = 2\text{sh}\,4\gamma,$$
$$x_1^5 - x_2^5 = 11{,}180 = F_5\sqrt{5} = \Phi^5 + \Phi^{-5} = \text{e}^{5\gamma} + e^{-5\gamma} = 2\text{ch}\,5\gamma,$$

$$x_1 + x_2 = 1 = L_1 = \Phi - \Phi^{-1} = \text{e}^{\gamma} - e^{-\gamma} = 2\text{sh}\,\gamma,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 3 = L_2 = \Phi^2 + \Phi^{-2} = \text{e}^{2\gamma} + e^{-2\gamma} = 2\text{ch}\,2\gamma,$$
$$x_1^3 + x_2^3 = 4 = L_3 = \Phi^3 - \Phi^{-3} = \text{e}^{3\gamma} - e^{-3\gamma} = 2\text{sh}\,3\gamma,$$
$$x_1^4 + x_2^4 = 7 = L_4 = \Phi^4 + \Phi^{-4} = \text{e}^{4\gamma} + e^{-4\gamma} = 2\text{ch}\,4\gamma,$$
$$x_1^5 + x_2^5 = 11 = L_5 = \Phi^5 - \Phi^{-5} = \text{e}^{5\gamma} - e^{-5\gamma} = 2\text{sh}\,5\gamma.$$

Из полученных разностей и сумм корней уравнения (1) следуют формулы чисел Фибоначчи и Люка:

$$F_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n\gamma} + \Phi^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{2ch\ n\gamma}{\sqrt{5}}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$
$$F_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n\gamma} - \Phi^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{2sh\ n\gamma}{\sqrt{5}}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

$$L_n = x_1^n + x_2^n = \Phi^n - \Phi^{-n} = e^{n\gamma} - e^{-n\gamma} = 2\text{sh}\ n\gamma, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$
$$L_n = x_1^n + x_2^n = \Phi^n + \Phi^{-n} = e^{n\gamma} + e^{-n\gamma} = 2ch\ n\gamma, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

Из формул решения чисел Фибоначчи Люка следуют гиперболических функций золотого сечения взаимосвязанных с корнями уравнений, золотым сечением, показательными функциями, числами Фибоначчи и Люка:

$$\text{ch}\ n\gamma = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2} = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{2} = \frac{F_n\sqrt{5}}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots,$$
$$\text{sh}\,\gamma = \frac{x_1^n - x_2^n}{2} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2} = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{2} = \frac{F_n\sqrt{5}}{2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

$$\text{ch}\, n\gamma = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2} = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{2} = \frac{L_n}{2}, \qquad n = 2, 4, 6,$$

$$\text{sh}\, n\gamma = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2} = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{2} = \frac{L_n}{2}. \quad n = 1, 3, 5,$$

Характеристическое уравнение Фибоначчи $x^2 – \sqrt{5}\,x + 1 = 0$

Характеристическим уравнением последовательности чисел Фибоначчи является также уравнение

$$x^2 – \sqrt{5}\,x + 1 = 0,$$

которому соответствуют два положительных корня:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618 = \Phi, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618 = \Phi.$$

Корни уравнения связаны как с золотым сечением, так и с показательными и гиперболическими функциями:

$$x_1 = \Phi = e^{\gamma} = \text{ch}\,\gamma + \text{sh}\,\gamma = 1{,}618, \qquad x_2 = \Phi^{-1} = e^{-\gamma} = \text{ch}\,\gamma - \text{sh}\,\gamma = 0{,}618,$$

$$\ln x_1 = \ln \Phi = 0{,}481 = \gamma, \quad \ln x_2 = \ln \Phi^{-1} = –0{,}481 = –\gamma,$$

$$\text{ch}\,\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{sh}\,\gamma = \frac{1}{2}.$$

Степени корней уравнения равны

$$x_1^1 = 1{,}618 = \Phi = e^{\gamma} = \text{ch}\,\gamma + \text{sh}\,\gamma, \qquad x_2^{-1} = 0{,}618 = \Phi^{-1} = e^{-\gamma} = \text{ch}\,\gamma - \text{sh}\,\gamma,$$

$$x_1^2 = 2{,}618 = \Phi^2 = e^{2\gamma} = \text{ch}\,2\gamma + \text{sh}\,2\gamma, \qquad x_2^{-2} = 0{,}382 = \Phi^{-2} = e^{-2\gamma} = \text{ch}\,2\gamma - \text{sh}\,2\gamma,$$

$$x_1^3 = 4{,}236 = \Phi^3 = e^{3\gamma} = \text{ch}\,3\gamma + \text{sh}\,3\gamma, \qquad x_2^{-3} = 0{,}236 = \Phi^{-3} = e^{-3\gamma} = \text{ch}\,3\gamma - \text{sh}\,3\gamma,$$

$$x_1^4 = 6{,}854 = \Phi^4 = e^{4\gamma} = \text{ch}\,4\gamma + \text{sh}\,4\gamma, \qquad x_2^{-4} = 0{,}146 = \Phi^{-4} = e^{-4\gamma} = \text{ch}\,4\gamma - \text{sh}\,4\gamma,$$

$$x_1^5 = 11{,}089 = \Phi^5 = e^{5\gamma} = \text{ch}\,5\gamma + \text{sh}\,5\gamma, \qquad x_1^{-5} = 0{,}089 = \Phi^{-5} = e^{-5\gamma} = \text{ch}\,5\gamma - \text{sh}\,5\gamma.$$

Разность и сумма степеней корней уравнения:

$$x_1 - x_2 = 1 = \Phi - \Phi^{-1} = L_1 = e^{\gamma} + e^{-\gamma} = 2\text{sh}\,\gamma,$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 2{,}236 = \Phi^2 - \Phi^{-2} = F_2\sqrt{5} = e^{2\gamma} + e^{-2\gamma} = 2\text{sh}\,2\gamma,$$

$$x_1^3 - x_2^3 = 4 = \Phi^3 - \Phi^{-3} = F_2 + F_4 = L_3 = e^{3\gamma} + e^{-3\gamma} = 2\text{sh}\,3\gamma,$$

$$x_1^4 - x_2^4 = 6{,}708 = \Phi^4 - \Phi^{-4} = F_4\sqrt{5} = e^{4\gamma} + e^{-4\gamma} = 2\text{sh} = 4\gamma,$$

$$x_1^5 - x_2^5 = 11 = \Phi^5 - \Phi^{-5} = F_4 + F_6 = L_5 = e^{5\gamma} + e^{-5\gamma} = 2\text{sh}\,5\gamma,$$

$$x_1 + x_2 = 2{,}236 = F_1\sqrt{5} = \Phi + \Phi^{-1} = e^{\gamma} + e^{-\gamma} = 2\,\text{ch}\gamma,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 = L_2 = \Phi^2 + \Phi^{-2} = e^{2\gamma} + e^{-2\gamma} = 2\text{ch}\,2\gamma,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = F_3\sqrt{5} = 4{,}472 = \Phi^3 + \Phi^{-3} = e^{3\gamma} + e^{-3\gamma} = 2\text{ch}\,3\gamma,$$

$$x_1^4 + x_2^4 = 7 = L_4 = \Phi^4 + \Phi^{-4} = e^{4\gamma} + e^{-4\gamma} = 2\text{ch}\,4\gamma,$$

$$x_1^5 + x_2^5 = F_5\sqrt{5} = 11{,}180 = \Phi^5 + \Phi^{-5} = e^{5\gamma} + e^{-5\gamma} = 2\text{ch}\,5\gamma.$$

Из полученных разностей и сумм корней уравнения (1) следуют формулы членов последовательностей чисел Фибоначчи и Люка:

$$F_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{ch}\, n\gamma, \qquad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$F_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{sh}\, n\gamma, \qquad \boldsymbol{n = 2, 4, 6, \dots}$$

$$L_n = x_1^n + x_2^n = \Phi^n - \Phi^{-n} = e^{n\gamma} - e^{-n\gamma} = 2\text{sh}\, n\gamma, \qquad n = 1, 3, 5,$$

$$L_n = x_1^n + x_2^n = \Phi^n + \Phi^{-n} = e^{n\gamma} + e^{-n\gamma} = 2\text{ch}\, n\gamma, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

а также гиперболические функции:

$$\text{ch}\, n\gamma = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{2} = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2} = \frac{\sqrt{5}F_n}{2}, \qquad n = 1, 3, 5,$$

$$\text{sh}\, n\gamma = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2} = \frac{\sqrt{5}F_n}{2}, \qquad n = 2, 4, 6,$$

$$\text{sh}\, n\gamma = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{L_n}{2} = \frac{e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2}, \qquad n = 1, 3, 5,$$

$$\text{ch}\, n\gamma = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{L_n}{2} = \frac{e^{n\gamma} + e^{-n\gamma}}{2} = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2}, \qquad n = 2, 4, 6,$$

Гиперболические функции могут быть представлены также формулами:

$$\text{ch}\,(n+1)\gamma = \sqrt{5}ch\; n\gamma - ch(n-1)\gamma, \qquad \text{ch}\, n\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[ch(n+1)\gamma + ch(n-1)\gamma\right],$$

$$\text{sh}\,(n+1)\gamma = \sqrt{5}sh\; n\gamma - sh(n-1)\gamma, \quad \text{sh}\, n\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[sh(n+1)\gamma + sh(n-1)\gamma\right].$$

При малых аргументах ($n\gamma < 10$) приближенные значения гиперболических функций:

$$\text{sh}\, n\gamma = n\gamma\left(1 + \frac{(n\gamma)^2}{6}\right), \qquad \text{ch}\, n\gamma = 1 + \frac{(n\gamma)^2}{2}.$$

При больших аргументах ($n\gamma > 10$):

$$\text{sh}\, n\gamma = \text{ch}\, n\gamma = \frac{1}{2}e^{n\gamma} = \frac{\sqrt{5}}{2}F_n = \frac{1}{2}L_n,$$

$$\frac{sh(n+1)\gamma}{shn\gamma} = \frac{ch(n+1)\gamma}{chn\gamma} = e^{\gamma} \to \Phi = 1{,}618.$$

Заключение

Из рассмотренных характеристических уравнений последовательностей чисел Фибоначчи следуют как известные, так и новые последовательности и формулы чисел Фибоначчи и Люка, их взаимосвязи с золотым сечением, показательными и гиперболическими функциями. Из сумм и разностей корней характеристического уравнения (1) следуют рекуррентные гиперболические последовательности типа Фибоначчи и типа Люка:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
	1	1	2	3	5
$\frac{2}{\sqrt{5}}$	**(ch 1γ**	**sh 2γ**	**ch 3γ**	**sh 4γ**	**ch 5γ …)**

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
1	3	4	7	11
2**(sh 1γ**	**ch 2γ**	**sh 3γ**	**ch 4γ**	**sh 5γ …)**

$F_1\sqrt{5}$	L_2	$F_3\sqrt{5}$	L_4	$F_5\sqrt{5}$
2,236	3	4,472	7	11,180
2(ch 1γ	**ch 2γ**	**ch 3γ**	**ch 4γ**	**ch 5γ …)**

L_1	$F_2\sqrt{5}$	L_3	$F_4\sqrt{5}$	L_5
1	2,236	4	6,708	11
2(sh 1γ	**sh 2γ**	**sh 3γ**	**sh 4γ**	**sh 5γ …)**

В основе полученных последовательностях лежат гиперболические функции золотого сечения, которые образуются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\text{sh}\, n\gamma = \text{ch}\,(n-1)\gamma + \text{sh}\,(n-2)\gamma, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\text{ch}\, n\gamma = \text{sh}\,(n-1)\gamma + \text{ch}\,(n-2)\gamma, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Гиперболические функции могут быть представлены также формулами:

$$\text{ch}\, n\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[ch(n+1)\gamma + ch(n-1)\gamma\right], \qquad \text{ch}\,(n+1)\gamma = \sqrt{5}ch\ n\gamma - ch(n-1)\gamma,$$

$$\text{sh}\, n\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[sh(n+1)\gamma + sh(n-1)\gamma\right], \qquad \text{sh}\,(n+1)\gamma = \sqrt{5}sh\ n\gamma - sh(n-1)\gamma\,.$$

При малых аргументах ($n\gamma < 10$) приближенные значения гиперболических функций:

$$\text{sh}\, n\gamma = n\gamma\left(1 + \frac{(n\gamma)^2}{6}\right), \qquad \text{ch}\, n\gamma = 1 + \frac{(n\gamma)^2}{2}.$$

При больших аргументах ($n\gamma > 10$):

$$\text{sh}\, n\gamma = \text{ch}\, n\gamma = \frac{1}{2}e^{n\gamma} = \frac{\sqrt{5}}{2}F_n = \frac{1}{2}L_n,$$

$$\frac{sh(n+1)\gamma}{shn\gamma} = \frac{ch(n+1)\gamma}{chn\gamma} = e^{\gamma} = \Phi = 1{,}618.$$

И еще. Если представить гиперболические синус и косинус в виде таблицы, то получим две гиперболических последовательностей чисел Фибоначчи и Люка

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sh $n\gamma$	0,500	1,118	2,000	3,351	5,500	8,933	14,500	23,439	38,000	61,362
ch $n\gamma$	1,118	1,500	2,236	3,500	5,584	9,000	14,513	23,500	37,941	61,500

Значения чередующихся гиперболических функций «синус–косинус» соответствуют числам последовательности Люка, а гиперболических функций «косинус–синус» – числам последовательности Фибоначчи. Это удивительная взаимосвязь гиперболических чисел Фибоначчи и Люка. При $n\gamma > 10$ обе функции практически совпадают.

В общем же отметим, что полученные последовательности чисел Фибоначчи и Люка, гиперболические функции имеют оригинальный характер (может я ошибаюсь?), позволяют значительно расширить полигон исследований свойств рекуррентных чисел и гиперболических функций в науке и технике.

Список литературы

1. Семенюта, Н. Ф. Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей / Н. Ф. Семенюта // Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1971. – Вып. 95. – С. 28–32.

2. Семенюта, Н. Ф. О связи рекуррентных числовых последовательных и гиперболических функций / Н. Ф. Семенюта // Применение АВМ и ЭЦВМ к решению некоторых задач механики деформируемых тел. – Гомель: БелИИЖТ, 1973. – Вып. 114. – С. 39–43.

3. Семенюта, Н. Ф. О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями / Н. Ф. Семенюта // Теоретическая электротехника. – Львов: Вища школа, 1974. – Вып. 17. – С. 23.

4. Семенюта, Н. Ф. О взаимосвязи золотого сечения и гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.25565, 07.07.201967, публ.25261, 12.03.2019

Семенюта, Н. Ф. Об уравнениях «золотого» сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.25261, 12.03.2019.

5. Стахов, А. П. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: история и приложения // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.14429, 31.05.2007.

6. Василенко, С. Л. Гиперболические функции «золотого» сечения // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-567, публ.14931, 05.12.2008.

7. Боднар, О. Я. Золотое сечение и неэвклидова геометрия в природе и искусстве / О. Я. Боднар. – Львов: Свит. 1994.

8. Ясинский, С. А. Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи / С. А. Ясинский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 239 с.

9. Aese Nur Guncan. The *q*-Fibonacci Hyperbolic Functions / N. Guncan, Y. Erbil / Appl. Math. Inf. Sci. – No. 11. – 2014. – P. 81–88.

10. Stakhov, A. The mathematics of harmony: from Euclid to Contemporary mathematics end computer science / A. Stakhov. – Singapore: World Scientific Publishing, – 2009. – 676 p.

11. Trzaska**, Z.** On Fibonacci hyperbolic trigonometry and modified numerical triangles / Z. Trzaska // Fib. Quart. –1996. – Vol. 34. – P. 129–138.

12. Fibonacci Hyperbolic Functions. From Wolfram Math World [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathworld. wolfram.com/Fibonacci Hyperbolic Functions.html.